



Leibniz Universität Hannover
Fakultät für Mathematik und Physik
Institut für Algebraische Geometrie

Schnitttheorie und enumerative Geometrie

Bachelorarbeit

Autor:	Jan Lange
Matrikelnummer:	10012185
Studiengang:	B.Sc. Mathematik
E-Mail:	<div></div>
Prüfer:	Prof. Dr. Stefan Schreieder

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung und Notation	1
1	Der Chow-Ring	1
1.1	Zykel und die Chow-Gruppe	1
1.2	Methoden zur Berechnung des Chow-Rings	7
2	Grassmann-Varietät	15
2.1	Konstruktion der Grassmann-Varietät	15
2.2	Chow-Ring von $\mathbb{G}(1, 3)$	20
3	Anwendung von Schnitttheorie in der enumerativen Geometrie	25
3.1	Schnitte von Geraden mit Kurven in \mathbb{P}^3	25
	Literaturverzeichnis	29
	Selbstständigkeitserklärung	30

0 Einleitung und Notation

Ich werde in meiner Arbeit mit dem Titel „Schnitttheorie und enumerative Geometrie“ anhand eines konkreten Beispiels zeigen, wie man mithilfe der Schnitttheorie Fragen in der enumerativen Geometrie beantworten kann. Wir wollen hier die Frage beantworten: Wie viele Geraden in \mathbb{P}^3 schneiden vier allgemein PGL_4 -verschobene Kurven? Dazu beginnen wir mit einer Einführung in die Schnitttheorie, in der wir den Chow-Ring definieren und anschließend einige wichtige Eigenschaften des Chow-Rings zeigen. Bevor wir uns der Beantwortung der Frage widmen, benötigen wir das Konzept der Grassmann-Varietät. Mit dieser können wir dann im letzten Kapitel die in Kapitel 1 entwickelte Theorie zur Beantwortung der Frage anwenden. Zusätzlich werden wir noch ein Kriterium bestimmen, in welchen Fällen wir die Frage nicht beantworten können. Ziel der Arbeit ist es gewesen, sich die Grundlagen der Schnitttheorie mithilfe des Buchs „3264 & all that“ von David Eisenbud und Joe Harris [Eis16] zu erarbeiten und anschließend diese in einem Beispiel anzuwenden. Daher orientiere ich mich überwiegend an [Eis16]. An einigen Stellen habe ich noch zusätzliche Beispiele und ausführlichere Beweise gegeben sowie in dem Buch gestellte Aufgaben gelöst. Bei den Aufgaben stehen die zugehörigen Aufgabennummern aus dem Buch in Klammern dahinter.

Im Folgenden sei mit Körper stets ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 gemeint. Ein Schema sei stets ein separiertes Schema von endlichem Typ über einem Körper. Ferner sei eine Varietät ein integrales, also reduziertes und irreduzibles, Schema. Soweit nichts anderes angegeben ist, seien Untervarietäten stets abgeschlossen. Ebenso meinen wir mit Punkt einen abgeschlossenen Punkt. Im zweiten Kapitel werden wir folgende Schreibweise für Teilmatrizen einer gegebenen Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}$ benutzen: Seien dazu $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ und $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ zwei k -elementige Teilmengen. Dann bezeichnet A_J^I die $k \times k$ -Teilmatrix von A , die nur die Zeilen mit Indizes aus I und nur die Spalten mit Indizes aus J enthält. Um die Notation zu vereinfachen, lassen wir die Mengenklammern weg. Wenn $I = \{1, \dots, m\}$ bzw. $J = \{1, \dots, n\}$ ist, lassen wir auch I bzw. J weg.

1 Der Chow-Ring

1.1 Zykel und die Chow-Gruppe

Definition 1.1 (Zykel). Sei X ein separiertes Schema von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0. Wir definieren die Gruppe der k -Zykel $Z_k(X)$ von X als die freie abelsche Gruppe, die von den integralen, abgeschlossenen Unterschemata von X der Dimension k erzeugt ist. Die Zykelgruppe

$$Z(X) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} Z_k(X)$$

von X ist die von integralen abgeschlossenen Unterschemata von X erzeugte freie abelsche Gruppe. Jeder Zykel lässt sich in der Form

$$Z = \sum_{i=1}^m n_i Y_i \quad (m \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{Z}, Y_i \subseteq X \text{ abgeschlossen, integral})$$

schreiben. Wir nennen einen Zykel $Z = \sum n_i Y_i$ effektiv, wenn alle Koeffizienten nicht negativ sind: $n_i \geq 0$.

Wir wollen zu abgeschlossenen Unterschemata einen Zykel assoziieren. Dazu benötigen wir den Begriff der Kompositionsreihe, an den wir hier kurz erinnern möchten: Prinzipiell kann man dies für beliebige Moduln über einem kommutativen Ring R mit 1 definieren. Wir beschränken uns hier auf den Fall, wo der Modul der Ring selbst ist. Dann heißt eine Kette von Ideale $I_j \subseteq R$

$$0 = I_t \subsetneq I_{t-1} \subsetneq \cdots \subsetneq I_1 \subsetneq I_0 = R$$

Kompositionsreihe, wenn es kein Ideal $I \subseteq R$ mit der Eigenschaft gibt, dass $I_j \subsetneq I \subsetneq I_{j-1}$ für ein $j \in \{1, \dots, t\}$. Nach dem Satz von Jordan-Hölder sind je zwei Kompositionsreihen eines Rings (Allgemeiner: eines Moduls über einem Ring) isomorph zueinander. Daher ist die Länge t der Kompositionsreihe wohldefiniert. Die Existenz einer endlichen Kompositionsreihe ist äquivalent zu der Bedingung, dass der Ring R (im Allgemeinen der Modul über dem Ring) noethersch und artinsch ist.

Lemma 1.2. *Sei $Y \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema und Y_1, \dots, Y_r die irreduziblen Komponenten von Y_{red} . Dann hat jeder lokale Ring \mathcal{O}_{Y, Y_i} eine endliche Kompositionsreihe.*

Beweis. Für den eindeutigen generischen Punkt η_i des irreduziblen Unterschemas Y_i gilt:

$$\mathcal{O}_{Y, Y_i} = \mathcal{O}_{Y, \eta_i}.$$

Weil X von endlichem Typ über einen Körper ist, ist X noethersch. Daher können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $Y = \text{Spec } A$ affin mit A noethersch ist. Der generische Punkt η_i korrespondiert zu einem minimalen Primideal $p_i \subset A$. Dann ist

$$\mathcal{O}_{Y, Y_i} = \mathcal{O}_{Y, \eta_i} = A_{p_i}.$$

Da A noethersch und p_i minimal ist, ist A_{p_i} ein noetherscher Ring der Dimension 0 und damit automatisch artinsch. Also existiert eine endliche Kompositionsreihe. \square

Bezeichne die Länge der Kompositionsreihe des lokalen Rings \mathcal{O}_{Y, Y_i} mit l_i . Damit können wir den zu einem abgeschlossenen Unterschemata assoziierten Zykel definieren.

Definition 1.3 (assoziierter Zykel). Seien Y, Y_i, l_i wie gerade definiert. Dann ist

$$\langle Y \rangle = \sum_{i=1}^r l_i Y_i$$

der zu Y assoziierte Zykel.

Definition 1.4 (rationale Äquivalenz). Sei $\text{Rat}(X) \subseteq Z(X)$ die von Zykeln der Form

$$\langle \Phi \cap (\{t_0\} \times X) \rangle - \langle \Phi \cap (\{t_1\} \times X) \rangle$$

erzeugte Untergruppe, wobei $t_0, t_1 \in \mathbb{P}^1$ sind und $\Phi \subseteq \mathbb{P}^1 \times X$ eine abgeschlossene, integrale Untervarietät ist, welche in keiner Faser der Form $\{t\} \times X$ enthalten ist. Wir nennen zwei Zykeln $Z_1, Z_2 \in Z(X)$ rational äquivalent, wenn $Z_1 - Z_2 \in \text{Rat}(X)$ gilt. Ferner nennen wir zwei Unterschemata rational äquivalent, wenn die dazu assoziierten Zykeln rational äquivalent sind.

Betrachten wir dazu zunächst ein einfaches Beispiel:

Beispiel 1.5. Betrachte den projektiven Raum $\mathbb{P}_k^2 = \text{Proj } k[x, y, z]$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k mit $\text{char } k \neq 2$ und die algebraischen Varietäten $Y_1 = V(xy - z^2)$ und $Y_2 = V(xy)$. Dann sind die beiden assoziierten Zyklen ($\langle Y_i \rangle = Y_i$) rational äquivalent. Um dies zu sehen, betrachte die Segre-Einbettung:

$$s_{1,2}: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5, ([s : t], [x : y : z]) \mapsto [sx : tx : sy : ty : sz : tz]$$

und die Varietät

$$\Phi = V(I) = V(x_0x_2 - x_4x_5, x_1x_3 - x_4x_5) \cap \text{Im}(s_{1,2}) \subset \mathbb{P}^5 = \text{Proj } k[x_0, \dots, x_5]$$

mit $I = (x_0x_3 - x_1x_2, x_0x_5 - x_1x_4, x_2x_5 - x_3x_4, x_0x_2 - x_4x_5, x_1x_3 - x_4x_5) \subset k[x_0, \dots, x_5]$. Dann gilt:

$$Y_1 = ([1 : 1] \times \mathbb{P}^2) \cap s_{1,2}^{-1}(\Phi), Y_2 = ([1 : 0] \times \mathbb{P}^2) \cap s_{1,2}^{-1}(\Phi).$$

Definition 1.6 (Chow-Gruppe). Die Chow-Gruppe von X ist

$$A(X) := Z(X) / \text{Rat}(X).$$

Wir schreiben $[Y] \in A(X)$ für die Äquivalenzklasse eines Zykels $Y \in Z(X)$ und ebenso $[Y]$ für die Äquivalenzklasse des zu einem Unterschema Y assoziierten Zykels.

Lemma 1.7. Die Chow-Gruppe eines Schemas X ist durch die Dimension graduiert, d.h.

$$A(X) = \bigoplus_k A_k(X),$$

wobei $A_k(X)$ die Gruppe der rationalen Äquivalenzklassen von k -Zykeln ist.

Beweis. Da wir bereits wissen, dass $Z(X)$ durch die Dimension graduiert ist, müssen wir nur zeigen, dass die Untergruppe $\text{Rat}(X)$ ebenfalls graduiert ist. Sei $\Phi \subseteq \mathbb{P}^1 \times X$ eine irreduzible Varietät, die in keiner Faser über X enthalten ist, und $t_0, t_1 \in \mathbb{P}^1$. In einer entsprechenden offenen, affinen Teilmenge $\Phi \cap (\mathbb{A}^1 \times X) = \text{Spec } R \subseteq \Phi$ ist das Schema $\Phi \cap (\{t_0\} \times X)$ gegeben durch $V(t - t_0)$. Dann gilt für jede irreduzible Komponente Y von $\Phi \cap (\{t_0\} \times X)$ nach dem Krulls Hauptidealtheorem [vgl. Eis16, Theorem 0.1]:

$$\begin{aligned} \text{codim}(Y, \Phi \cap (\mathbb{A}^1 \times X)) &= \text{codim}(\Phi \cap (\{t_0\} \times X), \Phi \cap (\mathbb{A}^1 \times X)) \\ &= \text{codim}((t - t_0), R) \leq 1. \end{aligned}$$

Die Kodimension kann aber nicht 0 sein, da Φ in keiner Faser enthalten ist. Analog folgt dies für jede irreduzible Komponente von $\Phi \cap (\{t_1\} \times X)$. Damit ist $\text{Rat}(X)$ durch die Dimension graduiert, also auch $A(X)$. \square

Wenn X equidimensional ist, kann man die Kodimension einer Untervarietät von X als Differenz der Dimensionen definieren. Dann ist die Chow-Gruppe auch graduiert durch die Kodimension. Wenn X zusätzlich noch glatt ist, schreiben wir $A^c(X) := A_{\dim X - c}(X)$.

Definition 1.8 ((generisch) transvers). Sei X eine Varietät und $A, B \subseteq X$ zwei Untervarietäten. Wir sagen: A und B schneiden sich transvers in einem Punkt p , wenn A, B und X glatt im Punkt p sind und

$$T_p A + T_p B = T_p X$$

oder äquivalent

$$\text{codim}(T_p A \cap T_p B) = \text{codim}(T_p A) + \text{codim}(T_p B).$$

Wir sagen, dass sich Untervarietäten $A_i \subseteq X$ in einem glatten Punkt $p \in X$ transvers schneiden, wenn p ein glatter Punkt von jeder Untervarietät A_i ist und

$$\text{codim} \left(\bigcap_i T_p A_i \right) = \sum_i \text{codim}(T_p A_i).$$

Wir sagen, dass A und B generisch transvers sind bzw. sich generisch transvers schneiden, wenn sie sich an einem allgemeinen Punkt in jeder Komponente von $A \cap B$ transvers schneiden, d.h. für jede Komponente $C \subseteq A \cap B$ ist die Menge der Punkte, an denen sich A und B transvers schneiden, offen und nicht leer. Darüber hinaus sagen wir, dass zwei Zykeln $\sum_j n_j A_j, \sum_k m_k B_k \in Z(X)$ sich generisch transvers schneiden, wenn A_j und B_k für jedes Paar (j, k) generisch transvers sind.

Eine schwächere Forderung ist die folgende Definition:

Definition 1.9 (dimensional transvers). Seien A, B zwei Unterschemata einer Varietät X . Dann nennen wir A und B dimensional transvers, wenn für jede irreduzible Komponente C des Schnittes $A \cap B$ gilt:

$$\text{codim } C = \text{codim } A + \text{codim } B.$$

Den Unterschied zwischen beiden Begriffen beschreibt die folgenden Proposition:

Proposition 1.10. *Zwei Unterschemata einer Varietät X sind genau dann generisch transvers, wenn sie dimensional transvers sind und jede irreduzible Komponente des Schnittes einen Punkt enthält, in dem X glatt und $A \cap B$ reduziert ist.*

Beweis. Seien A und B generisch transvers, dann enthält jede irreduzible Komponente von $A \cap B$ einen Punkt p , in dem A, B und X glatt sind und sich A und B transvers schneiden. Dann gilt mit [Eis16, Theorem 0.2]:

$$\text{codim } T_p C = \text{codim } T_p A + \text{codim } T_p B = \text{codim } A + \text{codim } B \geq \text{codim } C.$$

Zusammen mit $\dim T_p C \geq \dim C$ erhält man also $\text{codim } A + \text{codim } B = \text{codim } C$, d.h. A und B sind dimensional transvers, und außerdem $\dim C = \dim T_p C$, also ist C glatt im Punkt p und damit ist $A \cap B$ im Punkt p reduziert.

Seien nun umgekehrt A und B dimensional transvers und für jede irreduzible Komponente C von $A \cap B$ existiere ein Punkt, in dem X glatt und $A \cap B$ reduziert sei. Die Menge der glatten Punkte von X ist offen und hat einen nichtleeren Schnitt mit C , also ist die Menge der glatten Punkte von X , die in C enthalten sind, dicht in C . Da $A \cap B$ generisch reduziert ist, ist die Menge der Punkte in C , in denen C reduziert ist, offen und nichtleer.

Damit ist auch die Menge der glatten Punkte von C offen und nicht leer. Zwei offene, nichtleere Teilmengen einer irreduziblen Menge haben stets nichtleeren Schnitt. Daher existiert ein Punkt $p \in C$, in dem sowohl X als auch C glatt ist. Dann erhalten wir:

$$\dim T_p A + \dim T_p B - \dim T_p X = \dim T_p C = \dim C \stackrel{\text{dim. transv.}}{=} \dim A + \dim B - \dim X. \quad (1.1)$$

Da stets $\dim T_p A \geq \dim A$, $\dim T_p B \geq \dim B$, folgt mit Gleichung 1.1, dass A und B im Punkt p glatt sind. \square

Theorem 1.11 (Chow-Ring). *Sei X eine glatte, quasi-projektive Varietät. Dann existiert eine eindeutige Produktstruktur auf der Chow-Gruppe $A(X)$, die die folgende Bedingung erfüllt:*

Wenn zwei Untervarietäten $A, B \subseteq X$ sich generisch transvers schneiden, dann gilt

$$[A] \cdot [B] = [A \cap B].$$

Damit wird die Chow-Gruppe

$$A(X) = \bigoplus_{c=0}^{\dim X} A^c(X)$$

zu einem assoziativen, kommutativen, durch Kodimension graduierten Ring, dem Chow-Ring von X .

Der Beweis beruht im Wesentlichen auf dem folgenden Theorem, welches wir als „Black-box“ benutzen:

Theorem 1.12 (Moving Lemma). *Sei X eine glatte, quasi-projektive Varietät. Für alle $\alpha, \beta \in A(X)$ existieren generisch transverse Zyklen $A, B \in Z(X)$ mit $[A] = \alpha$ und $[B] = \beta$. Die Äquivalenzklasse $[A \cap B]$ ist dabei unabhängig von der Wahl der Zyklen A und B .*

Der erste Teil des Theorems liefert die Eindeutigkeit des Chow-Rings und wir beweisen einen Spezialfall (Theorem 1.14) davon, den wir dann überwiegend benutzen werden. Allerdings müssen wir den zweiten Teil, den Existenzteil, als gegeben hinnehmen.

Lemma 1.13. *Sei $\pi: X \rightarrow Y$ ein surjektiver Morphismus zwischen Varietäten über einem Körper k mit $\dim X = m$ und $\dim Y = n$, sodass alle Fasern die gleiche Dimension haben. Dann ist die Dimension aller Fasern $m - n$.*

Beweis. Nach [Vak17, Theorem 11.4.1.] existiert eine offene, nichtleere Teilmenge $U \subseteq Y$, sodass für jeden Punkt $q \in U$ die Faser über q Dimension $m - n$ hat. Daraus folgt direkt die Aussage. \square

Theorem 1.14 (Kleiman Theorem in Charakteristik 0). *Sei G eine algebraische Gruppe, die transitiv auf einer Varietät X über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0 operiert, und sei $A \subseteq X$ eine Untervarietät.*

- (a) *Wenn $\varphi: Y \rightarrow X$ ein Morphismus von Varietäten ist, dann ist das Urbild $\varphi^{-1}(gA)$ für allgemeine $g \in G$ generisch reduziert und von derselben Kodimension wie A ;*
- (b) *Wenn $B \subseteq X$ eine weitere Untervarietät ist, dann existiert eine offene, dichte Teilmenge von Elementen $g \in G$, sodass gA generisch transvers zu B ist;*

(c) Wenn $G = \prod_{i=1}^l \mathrm{GL}_{n_i}$ für $n_i \in \mathbb{N}$ und ein $l \in \mathbb{N}$ ist, dann ist $[gA] = [A] \in \mathcal{A}(X)$ für jedes $g \in G$.

Beweis. (a) Seien $n := \dim X$, $a := \dim A$, $b := \dim Y$ und $m := \dim G$. Für ein beliebiges $x \in X$ definieren wir den Morphismus

$$\mu_x: G \rightarrow X, g \mapsto gx.$$

Dann ist μ_x surjektiv, da G transitiv auf X operiert und die Fasern sind Nebenklassen des Stabilisators von x in G . Da Multiplikation mit einem $g \in G$ ein Automorphismus auf G ist, sind die Fasern von μ_x isomorph zueinander, also insbesondere haben sie dieselbe Dimension. Damit können wir Lemma 1.13 anwenden und erhalten, dass die Nebenklassen des Stabilisators eines Elementes $x \in X$ die Dimension $m - n$ hat. Wir setzen

$$\Gamma = \{(g, x, y) \in G \times A \times Y : gx = \varphi(y)\}.$$

Dann ist die Projektion $\pi: \Gamma \rightarrow A \times Y$ ein surjektiver Morphismus. Die Fasern sind Nebenklassen von Stabilisatoren eines Elementes aus X und haben demnach Dimension $m - n$. Wenden wir erneut Lemma 1.13 auf π an, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dim \Gamma - \dim(A \times Y) &= m - n; \\ \Rightarrow \dim \Gamma &= \dim A + \dim Y + m - n = a + b + m - n. \end{aligned}$$

Andererseits ist die Faser der Projektion $\Gamma \rightarrow G$ über $g \in G$ isomorph zu $\varphi^{-1}(gA)$. Wenn die Faser für allgemeine $g \in G$ nicht leer sind, hat sie die gewünschte Dimension $a + b - n$ (vgl. [Vak17, Theorem 11.4.1]).

X ist eine Varietät und nach [Har77, Korollar II.8.6] glatt an einem allgemeinen Punkt. Durch die Transitivität von G erhalten wir Isomorphismen zwischen den lokalen Ringen, sodass X glatt ist. Ferner ist jede algebraische Gruppe in Charakteristik 0 glatt, da die Gruppe auf sich selbst transitiv operiert. Daher sind die Fasern von π glatt, damit ist Γ glatt über $A_{\mathrm{sm}} \times Y_{\mathrm{sm}}$. Nach [Har77, Korollar III.10.7] existiert eine offene, nichtleere Teilmenge $U \subseteq G$, sodass die Projektion $(\Gamma \setminus \Gamma_{\mathrm{sing}}) \rightarrow G$ über U glatt ist. Hierbei bezeichne Γ_{sing} die Menge der singulären Punkte von Γ . Dann ist eine allgemeine Faser der Projektion $\Gamma \rightarrow G$ glatt außerhalb von Γ_{sing} . Wenn die Projektion $\Gamma_{\mathrm{sing}} \rightarrow G$ nicht dominant ist, ist $\varphi^{-1}(gA)$ glatt für allgemeine $g \in G$. Wir können daher nun annehmen, dass $\Gamma_{\mathrm{sing}} \rightarrow G$ dominant ist. Dann hat eine allgemeine Faser die Dimension

$$\dim \Gamma_{\mathrm{sing}} - \dim G < \dim \Gamma - \dim G.$$

Da G glatt ist, hat jede Komponente jeder Faser der Projektion $\Gamma \rightarrow G$ nach [Eis16, Theorem 0.2] Kodimension kleiner oder gleich m . Damit hat jede Komponente einer allgemeinen Faser Kodimension gleich m . Also kann keine Komponente einer allgemeinen Faser der Projektion $\Gamma \rightarrow G$ in Γ_{sing} enthalten sein. Daher ist $\varphi^{-1}(gA)$ generisch reduziert für allgemeine $g \in G$.

(b) Setze in Punkt a $Y = B$ und nutze Proposition 1.10.

(c) G ist dann eine offene Menge in einem Produkt von Vektorräumen von Matrizen,

denn die Menge $\{A \in \text{Mat}_n : \det A = 0\}$ ist abgeschlossen. Sei L die Gerade in M , die 1 und g verbindet, dann liefert die Untervarietät

$$Z = \{(h, x) \in (G \cap L) \times X : h^{-1}x \in A\}$$

eine rationale Äquivalenz zwischen A und gA . □

1.2 Methoden zur Berechnung des Chow-Rings

Nachdem wir den Chow-Ring definiert haben, wollen wir nun einige Eigenschaften des Chow-Rings sammeln.

Proposition 1.15. *Sei X ein Schema. Dann gilt:*

- (a) $A(X) = A(X_{\text{red}})$;
- (b) *Seien X_1, \dots, X_m die irreduziblen Komponenten von X , dann erzeugen die Äquivalenzklassen $[X_i]$ eine freie abelsche Untergruppe der Chow-Gruppe vom Rang m .*

Beweis. (a) Per Definition sind $Z(X), \text{Rat}(X)$ durch integrale, abgeschlossene Unterschemata erzeugt. Da die reduzierten Unterschemata Y eines gegebenen Schemas X in kanonischer Bijektion zu den reduzierten Unterschemata \tilde{Y} des reduzierten Schemas X_{red} stehen, sind die Chow-Gruppen identisch.

- (b) Sei X_i eine irreduzible Komponente von X . Wir wollen zeigen, dass X_i nur zu sich selbst rational äquivalent sein kann. Sei $\Phi \subset \mathbb{P}^1 \times X$ eine abgeschlossene, irreduzible Varietät, die in keiner Faser enthalten ist und eine Faser der Form $\{t\} \times X_i$ enthält. Dann muss Φ in der Komponente $\mathbb{P}^1 \times X_i$ enthalten sein. Da $\dim \Phi = \dim X_i + 1$, ist also $\Phi = \mathbb{P}^1 \times X_i$. Damit ist X_i nur zu sich selbst rational äquivalent. Das bedeutet insbesondere, dass $[X_i] \neq 0 \in A(X)$ und dass die $[X_i]$ linear unabhängig sind. Also bilden diese eine freie abelsche Untergruppe der Chow-Gruppe vom Rang m . □

Damit können wir als erstes Beispiel die Chow-Gruppe des affinen Raums bestimmen:

Satz 1.16. $\forall n \geq 0$ gilt $A(\mathbb{A}^n) = \mathbb{Z} \cdot [\mathbb{A}^n]$

Beweis. Nach Proposition 1.15 wissen wir, dass $\mathbb{Z} \cdot [\mathbb{A}^n] \subseteq A(\mathbb{A}^n)$ eine Untergruppe ist. Daher müssen wir lediglich zeigen, dass jede echte irreduzible Untervarietät $Y \subset \mathbb{A}^n$ zu 0 rational äquivalent ist. Wir wählen die Koordinaten von \mathbb{A}^n so, dass der Ursprung nicht in Y liegt. Daher existiert ein Polynom $g \in k[x_1, \dots, x_n]$, das auf ganz Y verschwindet und für das $g(0) = c \neq 0$ gilt. Betrachte den Ringautomorphismus

$$\phi: k[x_0, \dots, x_n, t, t^{-1}] \rightarrow k[x_0, \dots, x_n, t, t^{-1}], \quad \phi(x_i) = t^{-1}x_i, \phi(t) = t, \phi(t^{-1}) = t^{-1}.$$

Dieser korrespondiert zu einem Isomorphismus

$$\psi: \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \times \mathbb{A}^n.$$

Da \mathbb{A}^1 irreduzibel und $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ eine offene, nichtleere Teilmenge ist, ist $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ auch irreduzibel, somit auch $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \times Y \subset \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \times \mathbb{A}^n$ und ebenso $W^\circ = \psi(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \times Y)$. Man sieht leicht, dass

$$W^\circ = \{(t, ty) \in \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \times \mathbb{A}^n : y \in Y\}.$$

Sei W der Abschluss von W° in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^n$. Dieser ist wieder irreduzibel und liefert eine rationale Äquivalenz zwischen Y und 0 : Erweitere das Polynom g zu einem Polynom $G \in k[x_1, \dots, x_n, t, t^{-1}]$ durch $G(t, x) = g(t^{-1}x)$. G lässt sich zu einer regulären Funktion auf $\mathbb{P}^1 \setminus \{0\} \times \mathbb{A}^n$ fortsetzen, nämlich mit konstantem Wert c auf der Faser $\infty \times \mathbb{A}^n$. Damit ist diese Faser leer, d.h.

$$\langle W \cap (\infty \times \mathbb{A}^n) \rangle = 0.$$

Außerdem gilt

$$\langle W \cap (1 \times \mathbb{A}^n) \rangle = \langle Y \rangle = Y.$$

Damit ist Y zu 0 rational äquivalent, also $A(\mathbb{A}^n) = \mathbb{Z} \cdot [\mathbb{A}^n]$. □

Aufgabe 1. [Eis16, Aufgabe 1.34.] Wie sieht die Faser über 0 aus?

Sei $Y = V(f_1, \dots, f_r) \subset \mathbb{A}^n$ mit $f_1, \dots, f_r \in k[x_1, \dots, x_n]$. Dann ist

$$W^\circ = V(F_1, \dots, F_r) \subset \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \times \mathbb{A}^n, \quad F_i(t, x) = f_i(t^{-1}x) \in k[x_1, \dots, x_n, t, t^{-1}].$$

Dies ist also gerade eine über $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ parametrisierte Familie von Untervarietäten von \mathbb{A}^n . Die Faser des Abschlusses von W° in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^n$ über 0 ist dieselbe wie beim Abschluss von W° in $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^n$. Daher müssen wir hier lediglich das Limit ausrechnen. Betrachte dazu das (Prim-)Ideal $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n, t, t^{-1}]$, welches zu W° korrespondiert. Aus dem Beweis von Satz 1.16 wissen wir, dass Multiplikation mit t in $k[x_1, \dots, x_n, t, t^{-1}]$ ein Automorphismus ist. Daher gilt:

$$I = (\{t^{\deg F} F : F \in I\}) \subset k[x_1, \dots, x_n, t, t^{-1}].$$

Aber das Ideal $(\{t^{\deg F} F : F \in I\})$ ist auch in $k[x_1, \dots, x_n, t]$. Damit ist die Faser über 0 gerade

$$Z = V(\{t^{\deg F} F|_{t=0} : F \in I\}) \subseteq \mathbb{A}^n.$$

Dabei ist Z der lineare Unterraum von k^n , der zu der projektive Menge $\overline{Y} \cap H_\infty \subseteq H_\infty \cong \mathbb{P}^{n-1}$ korrespondiert.

Wir werden später sehen, dass die Chow-Gruppe für nichtleere, offene Teilmengen des affinen Raums auch die durch die Klasse der offenen Menge erzeugte freie abelsche Gruppe ist. Dies ist eine direkte Folgerung aus Ausschneidung, welche wir gleich beweisen werden. Dafür müssen wir zunächst verstehen, wie sich die Chow-Gruppe unter Morphismen verhält. Außerdem benötigen wir den Begriff des Divisors: Sei dazu X ein normales und integrales Schema und Y ein integrales Unterschema der Kodimension 1. Dann ist der lokale Ring $O_{X,Y}$ ein regulärer lokaler Ring und damit ein diskreter Bewertungsring. Bezeichne die Bewertungsfunktion mit ord_Y . Sei nun zusätzlich X affin. Dann setzen wir

den Divisor von einer regulären Funktion $f \in \mathcal{O}_X(X)$ als

$$\text{Div}(f) = \sum_{\substack{Y \subset X \\ \text{integral} \\ \text{codim}(Y, X)=1}} \text{ord}_Y(f) \langle Y \rangle.$$

Bemerke, dass die Summe wohldefiniert ist, da es nur endlich viele integrale Unterschemata Y der Kodimension 1 gibt, für die $\text{ord}_Y(f) \neq 0$ ist. Wegen $\text{ord}_Y(fg) = \text{ord}_Y(f) + \text{ord}_Y(g)$ für $f, g \in \mathcal{O}_X(X)$ können wir die Definition auf rationale Funktionen $\alpha = \frac{f}{g} \in K(X)$ durch

$$\text{Div}(\alpha) := \text{Div}(f) - \text{Div}(g)$$

erweitern. Dabei nennen wir die Divisoren

$$\begin{aligned} \text{Div}_0(\alpha) &:= \sum_{\text{ord}_Y(\alpha) \geq 0} \text{ord}_Y(\alpha) \langle Y \rangle, \\ \text{Div}_\infty(\alpha) &:= - \sum_{\text{ord}_Y(\alpha) \leq 0} \text{ord}_Y(\alpha) \langle Y \rangle \end{aligned}$$

den Divisor der Nullstellen $\text{Div}_0(\alpha)$ bzw. Divisor der Polstellen $\text{Div}_\infty(\alpha)$. Nun können wir den Divisor auch für rationale Funktion auf beliebigen, integralen und normalen Schemata X definieren. Wir betrachten dazu eine Überdeckung von X mit offenen affinen Mengen. Wegen $K(X) = K(U)$ für jede offene Menge U aus der Überdeckung, ist für jedes $\alpha \in K(X)$ der Divisor auf U

$$\text{Div}(\alpha|_U)$$

wohldefiniert, ferner stimmen diese Divisoren auf den Schnitten von je zwei offenen Mengen überein, sodass wir daher einen Divisor auf ganz X erhalten, den wir wieder mit $\text{Div}(\alpha)$ bezeichnen.

Damit können wir nun das Verhalten unter Morphismen untersuchen. Sei $f: X \rightarrow Y$ ein properer Morphismus. Dann ist das Bild jeder irreduziblen Untervarietät A von X eine irreduzible Untervarietät $f(A)$ von Y . Wenn zusätzlich $\dim A = \dim f(A)$ gilt, ist $f|_A: A \rightarrow f(A)$ generisch endlich, d.h. der Körper der rationalen Funktionen $K(f(A))$ ist eine endliche und algebraische Körpererweiterung von $K(A)$. Dann existiert eine offene, nichtleere Teilmenge $U \subseteq A$, sodass das Urbild $f^{-1}(x)$ für jedes $x \in X$ endlich ist. Sei $[K(f(A)) : K(A)]$ der Grad der Körpererweiterung. Dann definieren wir:

Definition 1.17 (Pushforward von Zykeln). Sei $f: X \rightarrow Y$ ein properer Morphismus von Schemata und $A \subset X$ eine abgeschlossene, irreduzible Untervarietät. Dann setzen wir:

1. $f_* \langle A \rangle = 0$, wenn $\dim f(A) < \dim A$ ist;
2. $f_* \langle A \rangle = [K(f(A)) : K(A)] \langle f(A) \rangle$, wenn $\dim f(A) = \dim A$ ist;

und erweitern diese Definition k -linear auf $Z(Y)$.

Wir werden gleich sehen, dass wir damit sogar eine Abbildung zwischen den Chow-Gruppen erhalten. Dafür benutzen wir [Ful84, Proposition 1.4]:

Proposition 1.18. *Sei $f: X \rightarrow Y$ ein properer, surjektiver Morphismus von irreduziblen Varietäten und sei $f_0 \in K(X)^*$. Dann gilt:*

- (a) $f_* \operatorname{Div}(f_0) = 0$, wenn $\dim Y < \dim X$;
(b) $f_* \operatorname{Div}(f_0) = \operatorname{Div}(N(r))$, wenn $\dim Y = \dim X$,

wobei $N(r)$ die Norm von r bezeichnet. Im Fall $\dim Y = \dim X$ haben wir bereits gesehen, dass $k(X)$ eine endliche, algebraische Körpererweiterung von $k(Y)$ ist. Die Multiplikation mit r ist ein Endomorphismus von $k(X)$, welchen wir als $k(Y)$ -linearen Morphismus auffassen können. $N(r)$ ist die Determinante dieses Morphismus.

Als kleinen Bonus erhalten wir damit eine alternative Definition der Gruppe $\operatorname{Rat}(X)$:

Proposition 1.19. *Sei X ein Schema, dann ist die Untergruppe $\operatorname{Rat}(X) \subset Z(X)$ durch alle Divisoren von rationalen Funktionen auf allen abgeschlossenen Untervarietäten von X erzeugt.*

Beweis. Wir wollen zeigen, dass die folgenden beiden Mengen in 1:1 - Korrespondenz stehen:

$$\{\Phi \subset \mathbb{P}^1 \times X \text{ wie in Definition 1.4}\} \xleftrightarrow{1:1} \{(W, r) \subset X \times k(X)^* : W \text{ Untervarietät von } X\}.$$

Dabei identifizieren wir die Zyklen wie folgt:

$$\langle \Phi \cap (\{t_0\} \times X) \rangle - \langle \Phi \cap (\{t_1\} \times X) \rangle = \operatorname{Div}(r). \quad (1.2)$$

Sei $W \subset X$ eine Untervarietät von X der Dimension $k + 1$ und sei $r \in K(X)^*$. Dann definiert r eine rationale Abbildung $W \rightarrow \mathbb{P}^1$. Sei nun $\hat{\Phi}$ der Abschluss des Graphen von dieser Funktion in $X \times \mathbb{P}^1$. Bezeichne das Bild von $\hat{\Phi}$ unter dem Isomorphismus $X \times \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^1 \times X$ mit Φ . Dann bildet die Projektion $p: \mathbb{P}^1 \times X \rightarrow X$ die Untervarietät Φ birational und proper auf W ab, da es eine Basiserweiterung ist. Sei ferner $f: \Phi \subset \mathbb{P}^1 \times X \rightarrow \mathbb{P}^1$ die Projektion auf die erste Komponente. Damit erhalten wir mit Proposition 1.18

$$\operatorname{Div}(r) = p_* \operatorname{Div}(f) = \langle \Phi \cap (\{t_0\} \times X) \rangle - \langle \Phi \cap (\{t_1\} \times X) \rangle$$

Sei nun umgekehrt $\Phi \subset \mathbb{P}^1 \times X$ gegeben, dann liefert $W := p(\Phi)$ mit $p: \mathbb{P}^1 \times X \rightarrow X$ eine Untervarietät von X und durch $f \circ p^{-1}$ eine rationale Abbildung von $W \rightarrow \mathbb{P}^1$, die zu einem $r \in K(X)^*$ korrespondiert. Man sieht leicht, dass die Konstruktionen invers zueinander sind. Die Aussage folgt dann mit Gleichung 1.2. \square

Kommen wir jetzt zurück zu dem Verhalten unter Morphismen:

Theorem 1.20. *Sei $f: X \rightarrow Y$ ein properer Morphismus von Schemata, dann induziert der in Definition 1.17 definierte Gruppenhomomorphismus f_* einen Gruppenhomomorphismus*

$$f_*: A(X) \rightarrow A(Y).$$

Beweis. Wir müssen lediglich zeigen, dass f_* rationale Äquivalenz erhält. Sei dafür $Z \in \operatorname{Rat}(X)$ gegeben. Indem wir die k -Linearität ausnutzen, können wir annehmen, dass Z eine irreduzible Untervarietät ist. Durch das Einschränken von f auf Z erhalten wir einen properen Morphismus, da Z abgeschlossen ist, sodass wir weiter annehmen können, dass $X = Z$ ist. Indem wir anschließend noch Y durch $f(X)$ ersetzen, erhalten wir die Voraussetzungen von Proposition 1.18, womit dann die Aussage folgt. \square

Proposition 1.21. *Sei X proper über k , dann existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus*

$$\deg: A(X) \rightarrow \mathbb{Z},$$

welcher die Klasse eines jeden abgeschlossenen Punktes auf 1 abbildet und auf jeder Klasse von reinen k -Zykeln mit $k > 0$ verschwindet.

Beweis. Die Abbildung ist eindeutig, falls sie existiert, da die Abbildung für jeden Generator der Zykelgruppe von X bzw. seiner Äquivalenzklasse definiert ist und damit für die Klasse jedes Zykels. Also müssen wir lediglich die Existenz zeigen. Diese folgt direkt aus Theorem 1.20, da $\deg = f_*$ für $f: X \rightarrow \text{Spec } k$. Die Abbildung f bildet jede abgeschlossene, irreduzible Untervarietät von X auf den Punkt $0 \in \text{Spec } k$ ab. Dieser hat Dimension 0 und damit ist für alle irreduziblen, abgeschlossenen Untervarietäten Z von X der Dimension > 0

$$f_*\langle Z \rangle = 0$$

und für jeden abgeschlossenen Punkt $P \in X$ gilt:

$$f_*\langle P \rangle = [K(P) : k]\langle 0 \rangle.$$

Da k algebraisch abgeschlossen ist, ist $K(P) = k$. Ferner ist nach Satz 1.16 $A(\text{Spec } k) = \mathbb{Z}$ und $\langle 0 \rangle = 1$. Daher ist $f_*: A(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ die gewünschte Abbildung. \square

Damit können wir zeigen, dass eine Klasse in $A(X)$ nicht null ist. Zur Vollständigkeit gebe ich hier noch zwei Theoreme zu dem Verhalten von Pullbacks ohne Beweise an.

Definition 1.22. Sei $f: X \rightarrow Y$ ein Morphismus von glatten Varietäten. Wir nennen eine Untervarietät $A \subset Y$ generisch transvers zu f , wenn das Urbild $f^{-1}(A)$ generisch reduziert ist und dieselbe Kodimension wie A besitzt.

Theorem 1.23. *Sei $f: X \rightarrow Y$ ein Morphismus von glatten, quasi-projektiven Varietäten.*

(a) *Dann existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $f^*: A^c(Y) \rightarrow A^c(X)$, sodass für $A \subset X$ generisch transvers zu f stets gilt:*

$$f^*([A]) = [f^{-1}(A)].$$

Die Abbildung f^ ist sogar ein Ringhomomorphismus.*

(b) *Die Abbildung $f_*: A(Y) \rightarrow A(X)$ ist eine Abbildung von graduierten Modulen über einen graduierten Ring, d.h. für $\alpha \in A^k(X), \beta \in A_l(Y)$ gilt:*

$$f_*(f^*\alpha \cdot \beta) = \alpha \cdot f_*\beta \in A_{l-k}(X).$$

Im Fall von flachen Morphismen ist die Abbildung f^* besonders einfach:

Theorem 1.24. *Sei $f: X \rightarrow Y$ ein flacher Morphismus von Schemata. Die Abbildung $f^*: A(Y) \rightarrow A(X)$, die auf Zykeln durch*

$$f^*(\langle A \rangle) = \langle f^{-1}(A) \rangle, \quad A \subset Y \text{ Untervarietät},$$

definiert ist, erhält rationale Äquivalenz und die Graduierung durch die Kodimension.

Zum Abschluss dieses Kapitels beweisen wir noch drei wichtige Methoden zur Berechnung der Chow-Gruppe: Mayer-Vietoris, Ausschneidung und (quasi-)affine Stratifizierung. Letztere benutzen wir im zweiten Kapitel zur Berechnung des Chow-Rings der Grassmann-Varietät $\mathbb{G}(1, 3)$. Wir halten zunächst folgende Beobachtung fest:

Lemma 1.25 (Äquivalente Definition des Chow-Rings). *Sei X ein Schema. Die Chow-Gruppe von X ist bis auf Isomorphie die Gruppe G , für die die Sequenz*

$$Z(\mathbb{P}^1 \times X) \xrightarrow{\rho} Z(X) \longrightarrow G \longrightarrow 0,$$

exakt ist, wobei ρ jede Untervarietät $\Phi \subseteq \mathbb{P}^1 \times X$, die in einer Faser enthalten ist, auf 0 abbildet und ansonsten auf

$$\langle \Phi \cap (\{t_0\} \times X) \rangle - \langle \Phi \cap (\{t_1\} \times X) \rangle.$$

Beweis. Nach Konstruktion ist gerade $\rho(\mathbb{P}^1 \times X) = \text{Rat}(X)$. Damit gilt:

$$G = \text{Im}(Z(X) \rightarrow G) / \ker(Z(X) \rightarrow G) \cong Z(X) / \text{Rat}(X)$$

□

Sei $Y \subset X$ ein abgeschlossenes Unterschema, dann erhalten wir eine abgeschlossene Einbettung $Y \rightarrow X$. Der Morphismus ist proper, sodass wir mit Theorem 1.20 einen Gruppenhomomorphismus $A(Y) \rightarrow A(X)$ erhalten. Die Inklusion der offenen Menge $U := X \setminus Y$ in X ist eine offene Einbettung und daher nach [Har77, Proposition 9.2(a)] flach. Also erhalten wir einen Homomorphismus $A(X) \rightarrow A(U)$ nach Theorem 1.24.

Proposition 1.26 (Mayer-Vietoris und Ausschneidung). *Sei X ein Schema.*

(a) (Mayer-Vietoris) *Seien X_1, X_2 abgeschlossene Unterschemata von X . Dann existiert eine rechtsexakte Sequenz*

$$A(X_1 \cap X_2) \longrightarrow A(X_1) \oplus A(X_2) \longrightarrow A(X_1 \cup X_2) \longrightarrow 0.$$

(b) (Ausschneidung) *Sei $Y \subset X$ ein abgeschlossenes Unterschema und sei $U := X \setminus Y$. Dann existiert eine rechtsexakte Sequenz*

$$A(Y) \longrightarrow A(X) \longrightarrow A(U) \longrightarrow 0.$$

Beweis. (b) Betrachte das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z(\mathbb{P}^1 \times Y) & \longrightarrow & Z(\mathbb{P}^1 \times X) & \longrightarrow & Z(\mathbb{P}^1 \times U) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z(Y) & \longrightarrow & Z(X) & \longrightarrow & Z(U) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & A(Y) & \longrightarrow & A(X) & \longrightarrow & A(U) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Dabei sind die horizontalen Abbildungen von der folgenden Form: $Z(Y) \rightarrow Z(X)$ bildet abgeschlossene, irreduzible Untervarietäten von Y auf sich selbst ab, aufgefasst als abgeschlossene, irreduzible Untervarietäten von X ; und $Z(X) \rightarrow Z(U)$ bildet abgeschlossene, irreduzible Untervarietäten Z von X auf den Schnitt $Z \cap U$ ab, welcher eine (ggf. leere) abgeschlossene, irreduzible Untervarietät von U ist. Die oberen beiden Reihen sind exakt und die mittleren drei Spalten sind exakt nach Proposition 1.19. Damit folgt, dass die dritte Reihe auch exakt ist.

- (a) Sei $Y = X_1 \cap X_2$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $X = X_1 \cup X_2$. Betrachte wieder das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & Z(\mathbb{P}^1 \times Y) & \longrightarrow & Z(\mathbb{P}^1 \times X_1) \oplus Z(\mathbb{P}^1 \times X_2) & \longrightarrow & Z(\mathbb{P}^1 \times X) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & Z(Y) & \longrightarrow & Z(X_1) \oplus Z(X_2) & \longrightarrow & Z(X) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & A(Y) & \longrightarrow & A(X_1) \oplus A(X_2) & \longrightarrow & A(X) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Dabei sind die horizontalen Abbildungen von der folgenden Form: $Z(Y) \rightarrow Z(X_1) \oplus Z(X_2)$ bildet einen Zykel $Z \in Z(Y)$ auf $(Z, -Z) \in Z(X_1) \oplus Z(X_2)$ ab und $Z(X_1) \oplus Z(X_2)$ ist die Addition der beiden Zyklen. Die Exaktheit folgt aus einem ähnlichen Argument wie in (b).

□

Zusammen mit Satz 1.16 erhalten wir direkt mittels Ausschneidung (Proposition 1.26):

Korollar 1.27. *Sei $U \subseteq \mathbb{A}^n$ eine nichtleere, offene Teilmenge, dann ist $A(U) = \mathbb{Z} \cdot [U]$.*

Definition 1.28 (Stratifizierung). Sei X ein Schema. Wir sagen X ist durch eine endliche Familie von irreduziblen, lokal abgeschlossenen Unterschemata U_i stratifiziert, wenn

- (i) X die disjunkte Vereinigung der U_i ist und
- (ii) für jedes i gilt:

$$\overline{U_i} = \bigcup_{U_j \subset U_i} U_j.$$

Wir nennen dabei die U_i Strata und ihre Abschlüsse $Y_i := \overline{U_i}$ abgeschlossene Strata. Ist jedes Stratum U_i isomorph zu einem affinen Raum \mathbb{A}^{k_i} , so nennen wir die Stratifizierung affin. Wir nennen die Stratifizierung quasi-affin, wenn jedes Stratum zu einer offenen Teilmenge eines affinen Raums isomorph ist.

Es genügt dabei die abgeschlossenen Strata anzugeben, da man daraus die Strata ermitteln kann:

Bemerkung 1.29. Nutze dieselben Bezeichnungen wie in Definition 1.28. Dann können wir die Strata aus den abgeschlossenen Strata durch

$$U_i = Y_i \setminus \bigcup_{Y_j \subsetneq Y_i} Y_j$$

bestimmen, denn

$$Y_i = \bigcup_{U_j \subset Y_i} U_j = U_i \dot{\cup} \bigcup_{\overline{U_j} \subsetneq Y_i} U_j = U_i \dot{\cup} \bigcup_{Y_j \subsetneq Y_i} Y_j.$$

Beispiel 1.30. Für den projektiven Raum können wir direkt eine affine Stratifizierung durch folgende abgeschlossene Strata angeben:

$$\mathbb{P}^1 \subsetneq \mathbb{P}^2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathbb{P}^n.$$

Die Strata sind dabei gegeben als $U_i = \mathbb{P}^i \setminus \mathbb{P}^{i-1} \cong \mathbb{A}^i$. Diese sind offensichtlich irreduzibel und abgeschlossen in der offenen Teilmenge $\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1} \cong \mathbb{A}^n$, also lokal abgeschlossen. Ferner gilt:

$$\mathbb{P}^n = (\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1}) \dot{\cup} (\mathbb{P}^{n-1} \setminus \mathbb{P}^{n-2}) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} (\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^0) \dot{\cup} \mathbb{P}^0 = U_n \dot{\cup} \dots \dot{\cup} U_0. \quad (1.3)$$

Da der Abschluss der U_i gerade \mathbb{P}^i ist, folgt Punkt ii der Definition 1.28 direkt aus Gleichung 1.3. Also ist dies eine affine Stratifizierung des projektiven Raums.

Zum Abschluss des ersten Kapitels beweisen wir noch einen wichtigen Satz:

Satz 1.31. *Wenn ein Schema eine quasi-affine Stratifizierung besitzt, dann ist die Chow-Gruppe durch die Klassen der abgeschlossenen Strata erzeugt.*

Beweis. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach der Anzahl m der Strata. Für $m = 1$ ist dies gerade Korollar 1.27. Sei also nun $m > 1$ und $(U_i)_{i=0,\dots,m-1}$ eine quasi-affine Stratifizierung eines Schemas X . Dann existiert ein minimales Stratum, d.h. ein Stratum, dessen Abschluss kein weiteres Stratum enthält. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass dies U_0 ist. Da U_0 minimal ist und der Abschluss von U_0 sich als Vereinigung von U_j schreiben lässt, muss U_0 bereits abgeschlossen sein. Das offene Unterschema $U := X \setminus U_0$ ist dann durch $(U_i)_{i=1,\dots,m-1}$ stratifiziert, wie man leicht sieht. Nach Induktion ist damit $A(U)$ durch die Klassen der Abschlüsse (in U) der U_i erzeugt. Mit Korollar 1.27 wissen wir außerdem, dass $A(U_0)$ durch $[U_0]$ erzeugt ist. Damit erhalten durch Ausschneidung (Proposition 1.26) die Rechtsexaktheit der Sequenz

$$\mathbb{Z}[U_0] \longrightarrow A(X) \longrightarrow A(U) \longrightarrow 0.$$

Damit ist die Chow-Gruppe von X durch die Bilder der Klassen der abgeschlossenen Strata von $A(U_0)$ und den Urbilder der Klassen der abgeschlossenen Strata von $A(U)$ erzeugt. Da U_0 bereits abgeschlossen in X ist, ist das Bild von $[U_0]$ gerade $[U_0]$. Ferner sind die Strata von $A(U)$ genau die Strata von $(U_i)_{i=0,\dots,m-1}$. Daher sind die Urbilder der abgeschlossenen Strata von $A(U)$ gerade die abgeschlossenen Strata $(\overline{U_i})_{i=0,\dots,m-1}$. \square

2 Grassmann-Varietät

Im letzten Kapitel wollen wir die bisher behandelte Theorie des Chow-Rings anwenden, um unsere Frage aus der enumerativen Geometrie zu untersuchen. Dafür benötigt man einen passenden Raum, in dem die zu untersuchenden Objekte abgeschlossene Unterschemata bilden. Es wird sich später als nützlich erweisen, dafür eine sogenannte Grassmann-Varietät zu benutzen. Daher folgt hier nun eine kurze Einführung in das Thema Grassmann-Varietäten.

2.1 Konstruktion der Grassmann-Varietät

Die einfachsten Grassmann-Varietäten sind projektive Räume $\mathbb{P}V$ zu einem vorgegebenen (endlich dimensional)en Vektorraum V . Bei dem projektiven Raum $\mathbb{P}V$ korrespondieren die abgeschlossenen Punkte zu den Ursprungsgeraden bzw. den eindimensionalen Untervektorräumen von V . Die Grassmann-Varietäten verallgemeinern dieses Konzept, indem man anstelle von eindimensionalen Unterräumen k -dimensionale Unterräume ($k \in \{1, \dots, \dim V\}$) verwendet.

Definition 2.1 (Grassmann-Varietäten als Menge). Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum und $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist die Grassmann-Varietät $G(k, V)$ (oder auch Grassmannsche) die Menge der k -dimensionalen Untervektorräume von V . Da k -dimensionale Untervektorräume von V zu den $(k-1)$ -dimensionalen Unterräumen von $\mathbb{P}V$ korrespondieren, können wir uns die Grassmann-Varietät $G(k, V)$ ebenfalls als Menge der $(k-1)$ -dimensionalen Unterräume von $\mathbb{P}V$ vorstellen. In dem Fall schreiben wir $\mathbb{G}(k-1, \mathbb{P}V)$ anstelle von $G(k, V)$. Häufig wollen wir den Vektorraum V nicht weiter spezifizieren, sondern nur mit Vektorräumen einer bestimmten Dimension n arbeiten. Dann schreiben wir $G(k, n)$ bzw. $\mathbb{G}(k-1, n-1)$.

Sei $\Lambda \subset V$ ein k -dimensionaler Untervektorraum. Dann schreiben wir für den dazu korrespondierenden Punkt auch $\Lambda \in G(k, V)$ bzw. $[\Lambda]$, wenn wir beide unterscheiden wollen.

Nun wollen wir die Menge $G(k, V)$ mit der Struktur einer projektiven Varietät ausstatten.

Definition 2.2 (Plücker-Einbettung und Plücker-Koordinaten). Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum. Dann assoziieren wir zu jedem k -dimensionalen Untervektorraum Λ den eindimensionalen Vektorraum

$$\bigwedge^k \Lambda \subset \bigwedge^k V,$$

welcher zu einem abgeschlossenen Punkt p_Λ in $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$ korrespondiert. Damit erhalten wir eine Abbildung von Mengen, die sogenannte Plücker-Einbettung:

$$\psi: G(k, V) \rightarrow \mathbb{P}\left(\bigwedge^k V\right) \cong \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}, \Lambda \mapsto p_\Lambda.$$

Konkret kann man so vorgehen: Wähle eine Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V . Damit können wir

Λ als Zeilenraum einer $k \times n$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,n} \end{pmatrix}$$

betrachten. Eine Basis für $\bigwedge^k V$ ist durch $\{e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}\}_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n}$ gegeben. Dann können wir das Dachprodukt der Basis $v_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} e_j$ wie folgt ausdrücken:

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} p_{j_1, \dots, j_k} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k},$$

wobei der Koeffizient $p_{j_1, \dots, j_k} = \det(A_{j_1, \dots, j_k})$ ist. Diese p_{j_1, \dots, j_k} nennt man die Plücker-Koordinaten von Λ . Die Plücker-Koordinaten sind dann offensichtlich das Bild des Punktes p_Λ unter dem Isomorphismus $\mathbb{P}(\bigwedge^k V) \cong \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$, der durch die Wahl einer Basis induziert ist.

Bei der Definition wurde an einigen Stellen eine Wahl getroffen. Daher muss noch gezeigt werden, dass die Abbildung ψ wohldefiniert ist.

Proposition 2.3. *Mit der gleichen Notation wie in Definition 2.2 ist die Abbildung ψ wohldefiniert und die Plücker-Koordinaten sind nach Wahl einer Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V bzw. eines Isomorphismus $\mathbb{P}(\bigwedge^k V) \cong \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ bis auf Skalare eindeutig.*

Beweis. Sei A' eine andere Matrixrepräsentation von Λ , was äquivalent zu der Wahl einer anderen Basis von Λ ist. Also existiert eine invertierbare $k \times k$ -Matrix Ω , die Basiswechselmatrix von Λ , mit $A' = \Omega A$. Dann gilt:

$$A'_{j_1, \dots, j_k} = \det \Omega \cdot A_{j_1, \dots, j_k}.$$

Damit sind die Plücker-Koordinaten von Λ eindeutig bis auf Skalare und ψ ist wohldefiniert. \square

Proposition 2.4. *Mit der Notation von Definition 2.2 ist $\psi(G(k, V))$ eine irreduzible Varietät.*

Beweis. Sei $\eta \in \bigwedge^k V$. Dann ist $v \wedge \eta = 0$ für ein $v \in V$ genau dann, wenn $\eta = v \wedge \eta'$ für ein $\eta' \in \bigwedge^{k-1} V$. Die Rückrichtung folgt sofort. Für die andere Richtung ergänze $v_1 := v$ zu einer Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V . Dann ist $\{v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_k}\}_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n}$ eine Basis von $\bigwedge^k V$. Schreibe nun

$$\eta = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} a_{j_1, \dots, j_k} v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_k}.$$

Falls $v \wedge \eta = 0$, so gilt wegen der Multilinearität von \wedge

$$0 = v_1 \wedge \eta = \sum_{2 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} a_{j_1, \dots, j_k} v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_k}.$$

Also sind alle $a_{j_1, \dots, j_k} = 0$ für $j_1 \neq 1$. Damit erhalten wir direkt:

$$\eta = v_1 \wedge \underbrace{\sum_{2 \leq j_2 < \dots < j_k \leq n} a_{1, j_2, \dots, j_k} v_{j_2} \wedge \dots \wedge v_{j_k}}_{=: \eta'}.$$

Führt man dieses Argument iterativ fort, so erhält man, dass ein von 0 verschiedenes Element $\eta \in \bigwedge^k V$ genau dann in der Form $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ für $v_1, \dots, v_k \in V$ geschrieben werden kann, wenn der Kern der Multiplikationsabbildung

$$\wedge \eta: V \rightarrow \bigwedge^{k+1} V, v \mapsto v \wedge \eta$$

genau Dimension k hat. Eine größere Dimension bedeutet $\eta = 0$ und ist daher nicht möglich. Damit ist der Untervektorraum in $\bigwedge^k V$, der zum Bild von $G(k, V)$ unter der Plücker-Einbettung korrespondiert, gerade

$$\widetilde{\psi(G)} = \{\eta \in \bigwedge^k V : \text{rank}(\wedge \eta) \leq n - k\}.$$

Dies ist die Nullstellenmenge der $(n - k + 1)$ -Minoren der Matrix, die zu $\wedge \eta$ korrespondiert. Die Minoren sind homogene Polynome vom Grad $n - k + 1$ auf $\bigwedge^k V$. Damit ist $\psi(G)$ eine algebraische Menge. Das Ideal von $\psi(G)$ ist der Kern der Abbildung

$$k[p_{i_1, \dots, i_k}]_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \rightarrow k[x_{i,j}]_{\substack{1 \leq i \leq k, \\ 1 \leq j \leq n}},$$

die p_{i_1, \dots, i_k} auf die Plücker-Koordinate der generischen Matrix $(x_{i,j})$ sendet, und ist daher prim. Also ist $G(k, V)$ eine irreduzible Varietät. \square

Wir betrachten daher die Grassmann-Varietät $G(k, V)$ ausgestattet mit der Struktur einer projektiven Varietät via der Plücker-Einbettung. Nun zeigen wir noch einige Eigenschaften der Grassmann-Varietät $G(k, V)$, die wir benötigen, um die Theorie aus Kapitel 1 anwenden zu können.

Proposition 2.5. *Die Grassmann-Varietät $G(k, V)$ besitzt eine Überdeckung durch offene Teilmengen der Form:*

$$U_\Gamma = \{\Lambda \in G(k, V) : \Lambda \cap \Gamma = 0\} \cong \text{Hom}(\Lambda, \Gamma) \cong \mathbb{A}^{k(n-k)} \quad (2.1)$$

für $\Gamma \subset V$ ein $(n - k)$ -dimensionaler Untervektorraum.

Beweis. Sei $\Gamma \subset V$ ein $(n - k)$ -dimensionaler Untervektorraum. Wir zeigen zunächst, dass U_Γ eine offene Menge ist. Sei dazu w_1, \dots, w_{n-k} eine Basis von Γ . Dann ist mit ähnlicher Argumentation wie im Beweis von Proposition 2.4

$$U_\Gamma = \{[\omega] \in G(k, V) \subset \mathbb{P}\left(\bigwedge^k V\right) : w \in \bigwedge^k V, w \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_{n-k} \neq 0\}$$

eine offene Menge. Nun zeigen wir, dass U_Γ isomorph zu dem affinen Raum $\mathbb{A}^{k(n-k)}$ ist. Dazu wählen wir einen beliebigen k -dimensionalen Untervektorraum $\Omega \subset V$, welcher komplementär zu Γ ist, d.h. $[\Omega] \in U_\Gamma$. Damit erhalten wir eine Zerlegung von V als direkte Summe $V = \Omega \oplus \Gamma$. Bezeichne die Projektion auf Ω bzw. Γ mit π_Ω bzw. π_Γ . Damit

erhalten wir eine Bijektion zwischen U_Γ und den linearen Abbildungen zwischen Ω und Γ wie folgt: Für $\Lambda \subset V$ mit $[\Lambda] \in U_\Gamma$ betrachte die Abbildung:

$$\phi_\Lambda: \Omega \xrightarrow{\pi_\Omega^{-1}} \Lambda \subset \Omega \oplus \Gamma \xrightarrow{\pi_\Gamma} \Gamma.$$

Wir bemerken, dass die Abbildung wohldefiniert ist, da π_Ω wegen $\Lambda \cap \Gamma = 0$ eine Bijektion ist. Dann ist Λ der Graph der Abbildung ϕ_Λ . Umgekehrt liefert der Graph jeder linearen Abbildung $\phi: \Omega \rightarrow \Gamma$ einen zu Γ komplementären Untervektorraum $\Lambda \subset V = \Omega \oplus \Gamma$ der Dimension k . Dies liefert die gewünschte Bijektion. Um zu sehen, dass diese Bijektion ein Isomorphismus ist, rechnen wir in Koordinaten. Sei dazu e_1, \dots, e_k eine Basis von Ω und e_{k+1}, \dots, e_n eine Basis von Γ . Dann bilden $\pi_\Omega^{-1}e_1, \dots, \pi_\Omega^{-1}e_k \in \Lambda$ eine Basis von Λ , da π_Ω eine Bijektion ist. Die $\pi_\Omega^{-1}e_i$ lassen sich eindeutig in der gegebenen Basis e_1, \dots, e_n schreiben als

$$\pi_\Omega^{-1}(e_i) = e_i + \sum_{j=1}^{n-k} a_{i,j} e_{j+k}.$$

Somit ist Λ der Zeilenraum der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} E_k & A \end{pmatrix},$$

wobei E_k die Einheitsmatrix der Größe k ist und $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n-k}}$. Die oben definierte Bijektion ordnet jedem Unterraum $\Lambda \subset V$ die Transponierte der Matrix A zu.

Starten wir mit einer Repräsentation von Λ als $k \times (n-k)$ -Matrix B' (mit e_1, \dots, e_n als Basis von V). Dann ist die Plücker-Koordinate $p_{1,2,\dots,k}$ nicht null. Indem wir anschließend B' mit der Inversen der $k \times k$ Teilmatrix $B'_{1,2,\dots,k}$ multiplizieren erhalten wir die Matrix B , denn dies entspricht gerade dem Basiswechsel von der gewählten Basis von Λ zu der Basis $\pi_\Omega^{-1}(e_1), \dots, \pi_\Omega^{-1}(e_k)$. Damit erhalten wir:

$$a_{i,j} = \det B_{1,\dots,\hat{i},\dots,k,k+j} = (\det B'_{1,\dots,k})^{-1} \det B'_{1,\dots,\hat{i},\dots,k,k+j} = \frac{p_{1,\dots,\hat{i},\dots,k,k+j}(\Lambda)}{p_{1,\dots,k}(\Lambda)}.$$

Damit ist $a_{i,j}$ eine reguläre Funktion auf U_Γ , also ist die Bijektion ein Isomorphismus. Der zweite Isomorphismus der Gleichung 2.1 folgt sofort aus der Beschreibung einer linearen Abbildung als Matrix. Das beweist die Aussage. \square

Die letzte Rechnung ist dabei lediglich ein Spezialfall der folgenden Proposition:

Proposition 2.6. *Mit denselben Bezeichnungen wie in dem Beweis von Proposition 2.5 erhalten wir für $t \in \{1, \dots, k\}$, $I = \{i_1, \dots, i_{k-t}\} \subset \{1, \dots, k\}$ und $J = \{j_1, \dots, j_t\} \subset \{1, \dots, n-k\}$:*

$$(-1)^{w(I^c)+1} \det A_J^I = \frac{p_{I^c \cup (J+k)}(\Lambda)}{p_{1,\dots,k}(\Lambda)}, \quad (2.2)$$

wobei I^c das Komplement von I bezeichnet und $w(I^c) := \sum_{a \in I^c} a - \sum_{i=0}^{|I^c|-1} i$.

Beweis. Da nach Proposition 2.3 die rechte Seite der Gleichung 2.2 unabhängig von der Matrixdarstellung von Λ ist, können wir die Plücker-Koordinaten mit der Matrix B aus

dem Beweis von Proposition 2.5 berechnen. Die Gleichung folgt hier sofort aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz. Die Formel für das Vorzeichen lässt sich dabei leicht überlegen. \square

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir den Tangentialraum der Grassmann-Varietät $\mathbb{G}(1, 3)$ bestimmen und eine Charakterisierung der Tangentialvektoren angeben, die aus der Differentialgeometrie entlehnt ist und in [Har92] benutzt wird.

Proposition 2.7. *Die Grassmann-Varietät $G(k, n)$ ist in jedem Punkt glatt und der Tangentialraum $T_\Lambda G(k, n)$ an jedem Punkt $[\Lambda] \in G(k, n)$ ist kanonisch isomorph zu $\text{Hom}(\Lambda, k^n / \Lambda)$.*

Beweis. Sei $[\Lambda] \in G(k, n)$ beliebig. Dann existiert nach Proposition 2.5 eine offene Menge $U_\Gamma \subset G(k, n)$ für einen geeigneten $(n - k)$ -dimensionalen Untervektorraum $\Gamma \subset k^n$, sodass $\Lambda \in U_\Gamma$ und $U_\Gamma \cong \text{Hom}(\Lambda, \Gamma)$. Da der affine Raum \mathbb{A}^n glatt ist und der Tangentialraum an jedem Punkt auch \mathbb{A}^n ist und ein Isomorphismus von Varietäten die Tangentialräume an den entsprechenden Punkten isomorph aufeinander abbilden, erhalten wir

$$T_\Lambda G(k, n) = T_\Lambda U_\Gamma \cong \text{Hom}(\Lambda, \Gamma) \cong \text{Hom}(\Lambda, k^n / \Lambda).$$

Dabei ist der letzte Isomorphismus durch den kanonischen Isomorphismus $\Gamma \cong k^n / \Lambda$ gegeben. Diese Beschreibung des Tangentialraums ist dabei unabhängig von dem gewählten Γ . Damit erhalten wir auch, dass $[\Lambda]$ ein glatter Punkt der Grassmann-Varietät ist. \square

Bemerkung 2.8. In der Differentialgeometrie gibt es noch eine weitere Charakterisierung des Tangentialraums einer komplexen Mannigfaltigkeit M an einen Punkt. Dabei werden die Tangentialvektoren mit Klassen von glatten Kurven

$$\varphi: (-1, 1) \rightarrow M \quad \text{mit } \varphi(0) = p$$

identifiziert, indem man jeder solchen Kurve dem Tangentialvektor $\varphi'(0) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \varphi(t)$ zuordnet. Dieselbe Idee wollen wir auch hier benutzen (vgl. [Har92, Beispiel 16.1]). Sei $\{L(t)\} \subset G(k, n)$ eine glatte Kurve mit $L(0) = \Lambda$, sei $v \in \Lambda$ ein beliebiger Vektor und $\{v(t)\} \subset k^n$ eine glatte Kurve mit $v(0) = v$ und $v(t) \in L(t)$ für alle t . Dann definieren wir die Abbildung:

$$\tilde{\varphi}: \Lambda \rightarrow k^n, v \mapsto \varphi_{v(t)}(v) := v'(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} v(t).$$

Allerdings hängt das Bild von v von der Wahl der Kurve $\{v(t)\}$ ab, wie folgende Rechnung zeigt: Sei $\{w(t)\} \subset k^n$ eine weitere glatte Kurve mit $w(0) = v$ und $w(t) \in L(t)$. Dann ist die Differenz

$$w(t) - v(t) = t \cdot u(t)$$

für eine glatte Kurve $\{u(t)\} \subset k^n$ mit $u(t) \in L(t)$ für alle t , d.h.

$$\varphi_{w(t)}(v) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} w(t) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (v(t) + tu(t)) = \varphi_{v(t)}(v) + \underbrace{u(0)}_{\in \Lambda}.$$

Wir erhalten also eine lineare Abbildung

$$\varphi: \Lambda \rightarrow k^n / \Lambda, v \mapsto [\varphi_{v(t)}(v)].$$

Umgekehrt liefert jede lineare Abbildung $\varphi \in \text{Hom}(\Lambda, k^n / \Lambda)$ eine glatte Kurve $\{L(t)\}$: Wähle dazu eine Basis v_1, v_2, \dots, v_k von Λ und definiere

$$L(t) := \langle v_1 + t\varphi(v_1), v_2 + t\varphi(v_2), \dots, v_k + t\varphi(v_k) \rangle,$$

wobei wir hier $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k)$ als Vektoren in k^n auffassen, indem wir die Urbilder von $\varphi(v_i)$ unter der Projektionsabbildung $k^n \rightarrow k^n / \Lambda$ betrachten. Man sieht leicht, dass die so bestimmte glatte Kurve $\{L(t)\} \subset G(k, n)$ wieder φ liefert.

2.2 Chow-Ring von $\mathbb{G}(1, 3)$

Nun wollen wir den Chow-Ring von $\mathbb{G}(1, 3)$ berechnen, um damit im letzten Kapitel die eingangs erwähnte Frage zu beantworten. Wir wollen dabei Satz 1.31 benutzen, daher müssen wir zunächst eine (quasi-)affine Stratifizierung finden. Dafür wählen wir eine vollständige Fahne des \mathbb{P}^3 . Das ist ein Tripel (p, L, H) bestehend aus einem Punkt $p \in \mathbb{P}^3$, einer Gerade $L \subset \mathbb{P}^3$ und einer Ebene $H \subset \mathbb{P}^3$, sodass $p \in L \subset H$. Die affine Stratifizierung ist dann durch die Schubertzellen gegeben:

Definition 2.9 (Schubertzykel und -zellen von $\mathbb{G}(1, 3)$). Sei $\mathcal{V} = (p, L, H)$ eine vollständige Fahne des \mathbb{P}^3 . Wir nennen die folgenden Mengen, aufgefasst als Schemata mit reduzierter Struktur, die Schubertzykel von $\mathbb{G}(1, 3)$:

$$\begin{aligned} \Sigma_{0,0}(\mathcal{V}) &= \mathbb{G}(1, 3); \\ \Sigma_{1,0}(\mathcal{V}) &= \{\Lambda \in \mathbb{G}(1, 3) : \Lambda \cap L \neq \emptyset\}; \\ \Sigma_{2,0}(\mathcal{V}) &= \{\Lambda \in \mathbb{G}(1, 3) : p \in \Lambda\}; \\ \Sigma_{1,1}(\mathcal{V}) &= \{\Lambda \in \mathbb{G}(1, 3) : \Lambda \subset H\}; \\ \Sigma_{2,1}(\mathcal{V}) &= \{\Lambda \in \mathbb{G}(1, 3) : p \in \Lambda \subset H\}; \\ \Sigma_{2,2}(\mathcal{V}) &= \{\Lambda \in \mathbb{G}(1, 3) : \Lambda = L\}. \end{aligned}$$

Wenn die gewählte Fahne klar ist, lassen wir das Argument weg. Wie in Bemerkung 1.29 werden wir daraus die offenen Mengen bestimmen (vgl. Proposition 2.11). Diese nennen wir die Schubertzellen.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass die Schubertzykel eine affine Stratifizierung bilden. Dafür müssen wir zunächst zeigen, dass die Schubertzykel abgeschlossene, irreduzible Untervarietäten sind. Fixiere für die nächsten zwei Propositionen eine Fahne $\mathcal{V} = (p, L, H)$.

Proposition 2.10. *Die Schubertzykel von $\mathbb{G}(1, 3)$ sind abgeschlossene, irreduzible Varietäten.*

Beweis. Da $\Sigma_{0,0} = \mathbb{G}(1, 3)$ eine irreduzible Varietät ist, müssen wir lediglich zeigen, dass die Mengen abgeschlossen, reduziert und irreduzibel sind. Nach Konstruktion sind die $\Sigma_{a,b}$ reduziert, also genügt es die Abgeschlossenheit und Irreduzibilität zu zeigen.

- $\Sigma_{2,2}$ ist ein abgeschlossener Punkt und damit irreduzibel;

- $\Sigma_{1,0}$ ist das Bild der Inzidenzkorrespondenz

$$\Gamma = \{(L', q) \in \mathbb{G}(1, 3) \times L : q \in L'\}.$$

Zunächst bemerken wir, dass Γ in $\mathbb{G}(1, 3) \times L$ abgeschlossen ist, denn $q \in L'$ genau dann, wenn für einen zugehörigen Vektor $v \in k^4$ mit $[v] = q \in \mathbb{P}^3$ gilt:

$$v_1 \wedge v_2 \wedge v = 0$$

für eine Basis v_1, v_2 von \tilde{L}' (vgl.[Har92, Beispiel 6.12]). Die Fasern der Projektion $\pi_L: \Gamma \rightarrow L$ sind die Geraden in \mathbb{P}^3 , die einen bestimmten Punkt $q \in L \subset \mathbb{P}^3$ enthalten, also sind die Fasern isomorph zu \mathbb{P}^2 und damit irreduzibel und von der selben Dimension. Da zusätzlich π_L proper ist, ist Γ auch irreduzibel. Damit ist auch $\Sigma_{1,0}$ irreduzibel und abgeschlossen;

- $\Sigma_{2,0}$ ist die Faser von π_L über p und damit abgeschlossen und irreduzibel;
- $\Sigma_{1,1} = \{[v] \in \mathbb{P}(\bigwedge^2 k^4) : v \wedge \eta_i = 0 \text{ für } i = \{1, 2, 3\}\}$ mit $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \bigwedge^2 k^4$ zu drei verschiedenen Geraden in H korrespondierend, die sich nicht im selben Punkt schneiden, ist abgeschlossen und isomorph zu $\mathbb{G}(1, 2)$ und damit irreduzibel;
- $\Sigma_{2,1} = \Sigma_{1,1} \cap \Sigma_{2,0}$ ist abgeschlossen und isomorph zu \mathbb{P}^1 , also irreduzibel.

□

Proposition 2.11. *Die Schubertzykel von $\mathbb{G}(1, 3)$ bilden eine affine Stratifizierung.*

Beweis. Wir haben folgende Inklusionen:

$$\begin{array}{ccccc} & & \Sigma_{2,0} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \Sigma_{2,2} & \hookrightarrow & \Sigma_{2,1} & & \Sigma_{1,0} \hookrightarrow \mathbb{G}(1, 3). \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \Sigma_{1,1} & & \end{array}$$

Damit können wir die Schubertzellen mit Bemerkung 1.29 bestimmen. Diese bilden eine Stratifizierung nach Proposition 2.10, wir müssen also nur noch zeigen, dass die Schubertzellen affin sind. Dabei benutzen wir, dass eine Gerade eindeutig durch die Angabe zweier verschiedener Punkte bestimmt ist und dass sich zwei Geraden in \mathbb{P}^2 und eine Gerade und eine Ebene in \mathbb{P}^3 aus Dimensionsgründen stets schneiden.

- $\Sigma_{2,2}$ ist offensichtlich isomorph zu \mathbb{A}^0 ;
- $\Sigma_{2,1}^\circ := \Sigma_{2,1} \setminus \Sigma_{2,2} = \{\Lambda : p \in \Lambda \subset H \text{ und } \Lambda \neq L\}$:

Wähle eine Gerade $L' \subset H$, die den Punkt p nicht enthält. Dann schneidet jede Gerade $\Lambda \in \Sigma_{2,1}^\circ$ die Gerade L' in einen eindeutigen Punkt, der in $L' \setminus (L \cap L')$ liegt, also insbesondere verschieden von p ist. Damit erhalten wir einen Isomorphismus:

$$\Sigma_{2,1}^\circ \cong L' \setminus (L \cap L') \cong \mathbb{A}^1;$$

- $\Sigma_{1,1}^\circ := \Sigma_{1,1} \setminus \Sigma_{2,1} = \{\Lambda : p \notin \Lambda \subset H\}$:

Wähle eine Gerade $L' \subset H$, die p enthält, aber verschieden von L ist. Dann schneidet jede Gerade $\Lambda \in \Sigma_{1,1}^\circ$ die Geraden L und L' in jeweils genau einen Punkt, der verschieden von p ist. Somit sind die Schnittpunkte $\Lambda \cap L$ und $\Lambda \cap L'$ verschieden. Damit erhalten wir einen Isomorphismus:

$$\Sigma_{1,1}^\circ \cong (L \setminus p) \times (L' \setminus p) \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \cong \mathbb{A}^2;$$

- $\Sigma_{2,0}^\circ := \Sigma_{2,0} \setminus \Sigma_{2,1} = \{\Lambda : p \in \Lambda \not\subset H\}$:

Wähle eine Ebene H' in \mathbb{P}^3 , die nicht p enthält. Dann schneidet jede Gerade $\Lambda \in \Sigma_{2,0}^\circ$ die Ebene H' in einem eindeutigen Punkt, der nicht in $H \cap H'$ enthalten und von p verschieden ist. Damit erhalten wir einen Isomorphismus:

$$\Sigma_{2,0}^\circ \cong H' \setminus (H \cap H') \cong \mathbb{A}^2;$$

- $\Sigma_{1,0}^\circ := \Sigma_{1,0} \setminus (\Sigma_{1,1} \cup \Sigma_{2,0}) = \{\Lambda : \Lambda \cap L \neq \emptyset, p \notin \Lambda \text{ und } \Lambda \not\subset H\}$:

Wähle eine Ebene H' in \mathbb{P}^3 , die den Punkt p enthält, aber nicht die Gerade L . Dann schneidet jede Gerade $\Lambda \in \Sigma_{1,0}^\circ$ die Ebene H' in einem eindeutigen Punkt, der nicht in H enthalten ist. Außerdem schneidet Λ die Gerade L in einem Punkt verschieden von p . Diese beiden Schnittpunkte sind offensichtlich verschieden. Daher erhalten wir einen Isomorphismus:

$$\Sigma_{1,0}^\circ \cong (H' \setminus (H' \cap H)) \times (L \setminus p) \cong \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1 \cong \mathbb{A}^3;$$

- Und zum Schluss $\Sigma_{0,0}^\circ := \mathbb{G}(1,3) \setminus \Sigma_{1,0} = \{\Lambda : \Lambda \cap L = \emptyset\}$:

Wähle eine Ebene H' in \mathbb{P}^3 , die L enthält, aber verschieden von H ist. Dann schneidet jede Gerade $\Lambda \in \Sigma_{0,0}^\circ$ die Ebenen H und H' in jeweils einen eindeutigen Punkt, der nicht in L enthalten ist. Diese sind auch verschieden voneinander, sodass wir einen Isomorphismus:

$$\Sigma_{0,0}^\circ \cong (H \setminus L) \times (H \setminus L') = \mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^2 \cong \mathbb{A}^4.$$

Also bilden die Schubertzellen eine affine Stratifizierung. □

Bemerkung 2.12. Die Klassen $[\Sigma_{a,b}] \in A^{a+b}(\mathbb{G}(1,3))$ hängen nach Theorem 1.14 nicht von der Wahl der Fahne ab, da sich zwei Fahnen durch einen geeigneten Koordinatenwechsel - eine Transformation in GL_4 - ineinander überführen lassen. Wir schreiben daher für die Klasse von $\Sigma_{a,b}$: $\sigma_{a,b} = [\Sigma_{a,b}] \in A^{a+b}(\mathbb{G}(1,3))$.

Wir können nun den Chow-Ring vollständig beschreiben:

Theorem 2.13. *Die sechs Schubertklassen $\sigma_{a,b} \in A^{a+b}(\mathbb{G}(1,3))$, $0 \leq b \leq a \leq 2$ erzeugen $A(\mathbb{G}(1,3))$ frei und erfüllen die folgenden multiplikativen Relationen:*

$$\begin{aligned} \sigma_{1,0}^2 &= \sigma_{1,1} + \sigma_{2,0} & (\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 &\rightarrow \mathbb{A}^2); \\ \sigma_{1,0}\sigma_{1,1} &= \sigma_{1,0}\sigma_{2,0} = \sigma_{2,1} & (\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^2 &\rightarrow \mathbb{A}^3); \\ \sigma_{1,0}\sigma_{2,1} &= \sigma_{2,2} & (\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^3 &\rightarrow \mathbb{A}^4); \\ \sigma_{1,1}^2 &= \sigma_{2,0}^2 = \sigma_{2,2}, \quad \sigma_{1,1}\sigma_{2,0} = 0 & (\mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^2 &\rightarrow \mathbb{A}^4). \end{aligned}$$

Aus den Formeln können wir direkt schließen, dass $\sigma_{1,0}^3 = 2\sigma_{2,1}$, $\sigma_{1,0}^4 = 2\sigma_{2,2}$ und $\sigma_{1,0}^2\sigma_{1,1} = \sigma_{1,0}^2\sigma_{2,0} = \sigma_{2,2}$. Alle anderen Produkte sind 0, da $\dim \mathbb{G}(1,3) = 4$.

Beweis. Wir wissen nach Satz 1.31, dass die Klassen $\sigma_{a,b}$ die Chow-Gruppe $A(\mathbb{G}(1,3))$ erzeugen. Um zu zeigen, dass die Erzeuger frei sind, müssen wir lediglich zeigen, dass die Erzeuger in $A^k(\mathbb{G}(1,3))$ für $k \in \{0,1,2,3,4\}$ linear unabhängig sind. Für $k \neq 2$ ist dies äquivalent zu der Aussage, dass die entsprechende Schubertklasse nicht null ist. Für $k = 0$ folgt dies direkt aus Proposition 1.15 und für $k = 4$ aus Proposition 1.21, da $\mathbb{G}(1,3)$ proper über k ist. Die restlichen Aussagen folgen aus einer Berechnung der Schnittprodukte, die nun folgt.

Um den Schnitt von Paaren von Schubertzykeln auszurechnen, betrachten wir zwei generisch gelegene Fahnen \mathcal{V} und \mathcal{V}' . Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir $\Sigma_{a,b}$ für $\Sigma_{a,b}(\mathcal{V})$ und $\Sigma'_{a,b}$ für $\Sigma_{a,b}(\mathcal{V}')$. Wir beweisen zunächst die Fälle der Klassen mit komplementärer Dimension. Nach Kleimans Transversalitätstheorem (Theorem 1.14) können wir annehmen, dass $\Sigma_{2,0}$ und $\Sigma'_{2,0}$ generisch transvers sind und erhalten dann nach Definition der Multiplikation im Chow-Ring (vgl. Theorem 1.11)

$$\sigma_{2,0}^2 = [\Sigma_{2,0} \cap \Sigma'_{2,0}] = \# (\Sigma_{2,0} \cap \Sigma'_{2,0}) \cdot \sigma_{2,2}.$$

Der Schnitt

$$\Sigma_{2,0} \cap \Sigma'_{2,0} = \{\Lambda : p \in \Lambda \text{ und } p' \in \Lambda\}$$

besteht aus einem Punkt, nämlich die eindeutige Gerade in \mathbb{P}^3 durch die Punkte p und p' . Damit gilt also

$$\sigma_{2,0}^2 = \sigma_{2,2}.$$

Analog erhalten wir

$$\sigma_{1,1}^2 = \# (\Sigma_{1,1} \cap \Sigma'_{1,1}) \cdot \sigma_{2,2} = \sigma_{2,2},$$

denn der Schnitt

$$\Sigma_{1,1} \cap \Sigma'_{1,1} = \{\Lambda : \Lambda \subset H \text{ und } \Lambda \subset H'\}$$

besteht aus der eindeutigen Geraden $\Lambda = H \cap H'$. Ferner ist $p \notin H'$, sodass die Schubertzykel $\Sigma_{1,1} = \{\Lambda : \Lambda \subset H\}$ und $\Sigma'_{1,1} = \{\Lambda : p' \in \Lambda\}$ disjunkt sind, also gilt:

$$\sigma_{1,1}\sigma_{2,0} = \# (\Sigma_{1,1} \cap \Sigma'_{2,0}) \cdot \sigma_{2,2} = 0.$$

Außerdem kann der Schnitt der Schubertzykel

$$\Sigma_{1,0} \cap \Sigma'_{2,1} = \{\Lambda : \Lambda \cap L \neq \emptyset \text{ und } p' \in \Lambda \subset H'\}$$

nur die Gerade durch die Punkte p' und den eindeutigen Schnittpunkt q von L mit H' enthalten, sodass wir direkt folgern:

$$\sigma_{1,0}\sigma_{2,1} = \sigma_{2,2}.$$

Kommen wir nun zu den restlichen Gleichungen. Betrachten wir zunächst den Schnitt $\Sigma_{1,0} \cap \Sigma'_{2,0} = \{\Lambda : \Lambda \cap L \neq \emptyset \text{ und } p' \in \Lambda\}$. Dies sind die Geraden, die den Punkt p'

enthalten und gleichzeitig in der eindeutigen Ebene liegen, die den Punkt p' und die Gerade L enthält, also der Schubertzykel $\Sigma_{2,1}(\hat{\mathcal{V}})$ für eine geeignete Fahne $\hat{\mathcal{V}}$. Damit erhalten wir

$$\sigma_{1,0}\sigma_{2,0} = \sigma_{2,1}.$$

Der Schnitt

$$\Sigma_{1,0} \cap \Sigma'_{1,1} = \{\Lambda : \Lambda \cap L \neq \emptyset \text{ und } \Lambda \subset H'\}$$

enthält genau die Geraden, die in der Ebene H' liegen und den eindeutigen Schnittpunkt $L \cap H'$ enthalten, also wieder der Schubertzykel $\Sigma_{2,1}(\hat{\mathcal{V}})$ für eine geeignete Fahne $\hat{\mathcal{V}}$, d.h.:

$$\sigma_{1,0}\sigma_{1,1} = \sigma_{2,1}.$$

Die letzte Gleichung ist ein wenig schwieriger, da der Schnitt

$$\Sigma_{1,0} \cap \Sigma'_{1,0} = \{\Lambda : \Lambda \cap L \neq \emptyset \text{ und } \Lambda \cap L' \neq \emptyset\}$$

kein Schubertzykel ist. Wir wissen bereits, dass $\sigma_{2,0}$ und $\sigma_{1,1}$ linear unabhängig sind und dass $\sigma_{1,0}^2 \in A^2(\mathbb{G}(1,3))$ ist. Also können wir

$$\sigma_{1,0}^2 = \alpha\sigma_{2,0} + \beta\sigma_{1,1}$$

für geeignete (und eindeutige) $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ schreiben. Wir nutzen nun die Assoziativität des Chow-Rings aus. Wir erhalten so nach Multiplikation mit $\sigma_{2,0}$:

$$\alpha\sigma_{2,2} = \alpha\sigma_{2,0}^2 + \beta\sigma_{1,1}\sigma_{2,0} = (\alpha\sigma_{2,0} + \beta\sigma_{1,1})\sigma_{2,0} = \sigma_{1,0}^2\sigma_{2,0} = \sigma_{2,2}.$$

Damit erhalten wir $\alpha = 1$ und nach Multiplikation mit $\sigma_{1,1}$ erhalten wir $\beta = 1$:

$$\beta\sigma_{2,2} = \alpha\sigma_{2,0}\sigma_{1,1} + \beta\sigma_{1,1}^2 = (\alpha\sigma_{2,0} + \beta\sigma_{1,1})\sigma_{1,1} = \sigma_{1,0}^2\sigma_{1,1} = \sigma_{2,2}.$$

Somit erhalten wir insgesamt

$$\sigma_{1,0}^2 = \sigma_{2,0} + \sigma_{1,1}.$$

Das schließt unseren Beweis ab. □

Als direkte Konsequenz erhalten wir folgende Beschreibung des Chow-Rings:

Korollar 2.14.

$$A(\mathbb{G}(1,3)) = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_{1,0}, \sigma_{2,0}]}{(\sigma_{1,0}^3 - 2\sigma_{1,0}\sigma_{2,0}, \sigma_{1,0}^2\sigma_{2,0} - \sigma_{2,0}^2)}.$$

3 Anwendung von Schnitttheorie in der enumerativen Geometrie

Nach [Eis16, Abschnitt 3.1.1] geht man bei der Lösung von enumerativen Probleme typischerweise in 5 Schritten vor: Zunächst muss man einen geeigneten Parameterraum, hier $\mathbb{G}(1, 3)$, finden oder konstruieren. Danach bestimmt man den Chow-Ring des Parameter-raums, was wir in Theorem 2.13 bzw. Korollar 2.14 gemacht haben. Der dritte Schritt ist die Klassen in den Chow-Ring zu finden, die zu den gestellten Bedingungen gehören. Dies ist Proposition 3.1. Anschließend berechnet man das Produkt der eben bestimmten Klassen, um eine Antwort auf die Frage zu erhalten (Korollar 3.2). Dabei muss man die generische Transversalität der Zykeln nachweisen, was dann unter dem letzten Schritt fällt. Falls möglich, möchte man auch untersuchen, in welchen Fällen die Zykeln sich generisch transvers schneiden. In unserem Beispiel untersuchen wir dies in Aufgabe 2.

3.1 Schnitte von Geraden mit Kurven in \mathbb{P}^3

Proposition 3.1. *Sei $C \subset \mathbb{P}^3$ eine Kurve, d.h. ein eindimensionales, abgeschlossenes Unterschema, vom Grad d . Sei $\Gamma_C := \{L \in \mathbb{G}(1, 3) : L \cap C \neq \emptyset\}$ die Menge der Geraden, die C schneiden, dann ist die Klasse von Γ_C gegeben durch:*

$$[\Gamma_C] = d \cdot \sigma_{1,0} \in A^1(\mathbb{G}(1, 3)).$$

Beweis. Wir wollen zunächst zeigen, dass Γ_C eine abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{G}(1, 3)$ der Dimension 3 ist. Dazu betrachten wir die Inzidenzkorrespondenz

$$\begin{array}{ccc} \Sigma = \{(p, L) \in C \times \mathbb{G}(1, 3) : p \in L\} & \xrightarrow{\pi_C} & C \\ \downarrow \pi_{\mathbb{G}(1,3)} & & \\ \mathbb{G}(1, 3) & & \end{array}$$

Wir bemerken zunächst, dass $\pi_{\mathbb{G}(1,3)}|_{\Sigma} = \Gamma_C$ und ähnlich wie in dem Beweis von Proposition 2.10 zeigt man, dass Σ eine abgeschlossene Varietät ist. Die Fasern von Σ unter π_C sind die Geraden in \mathbb{P}^3 , die einen bestimmten Punkt enthalten, also sind diese isomorph zu \mathbb{P}^2 . Damit haben wir einen surjektiven Morphismus zwischen zwei projektiven Varietäten. Dann existiert eine offene Teilmenge von einer irreduziblen Komponente von C , sodass die Fasern über dieser offenen Teilmenge die Dimension

$$\dim \Sigma - \dim C$$

haben. Da wir aber die Dimension aller Fasern kennen, gilt

$$\dim \Sigma = 2 + \dim C = 3$$

Die Projektion $\pi_{\mathbb{G}(1,3)}$ ist generisch 1 zu 1, denn die Menge der Geraden in \mathbb{P}^3 , die C in mindestens zwei Punkten schneiden ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{G}(1, 3)$ der Dimension ≤ 2 . Also erhalten wir wiederum, dass

$$\dim \Gamma_C = \dim \Sigma - 0 = 3.$$

Da $\pi_{\mathbb{G}(1,3)}$ proper ist, ist Γ_C also eine abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{G}(1,3)$ der Dimension 3.

Sei γ_C die Klasse von Γ_C in $A^1(\mathbb{G}(1,3))$. Nach Theorem 2.13 können wir also

$$\gamma_C = \alpha \cdot \sigma_{1,0}$$

für ein $\alpha \in \mathbb{Z}$ schreiben. Betrachte nun eine allgemeine Fahne $\mathcal{V} = (p, L_0, H)$. Dann schneidet der dazu gehörige Schubertzykel

$$\Sigma_{2,1} = \{L \in \mathbb{G}(1,3) : p \in L \subset H\}$$

den Zykel Γ_C nach Theorem 1.14 generisch transvers. Da die Varietäten komplementäre Dimensionen besitzen, schneiden sie sich transvers. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha \deg(\sigma_{1,0} \cdot \sigma_{2,1}) = \deg(\gamma_C \cdot \sigma_{2,1}) = \#(\Gamma_C \cap \Sigma_{2,1}) \\ &= \#\{L \in \mathbb{G}(1,3) : p \in L \subset H \text{ und } L \cap C \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Da H eine allgemeine Ebene und $\deg C = d$ ist, schneidet die Kurve C die Ebene H in d Punkten $\{q_1, \dots, q_d\}$. Ferner ist $p \in H$ ein allgemeiner Punkt, d.h. p liegt auf keiner der Geraden $\overline{q_i, q_j}$ ($i \neq j$). Daher enthält der Schnitt genau die d Geraden von der Form $\overline{p, q_i}$. Also erhalten wir

$$\gamma_C = d \cdot \sigma_{1,0}.$$

□

Damit können wir die eingangs gestellte Frage beantworten:

Korollar 3.2. *Seien C_1, C_2, C_3 und $C_4 \subset \mathbb{P}^3$ vier allgemein PGL_4 -verschobene und Kurven der Grade d_1, d_2, d_3 bzw. d_4 , dann ist $2 \prod_{i=1}^4 d_i$ die Anzahl der Geraden, die alle vier schneiden.*

Beweis. Nach Theorem 1.14 sind die Zyklen Γ_{C_i} generisch transvers. Daher ist die Anzahl der Geraden, die alle vier schneiden, genau

$$\deg \prod_{i=1}^4 [\Gamma_{C_i}] = \deg \prod_{i=1}^4 d_i \sigma_{1,0} = \deg(\sigma_{1,0}^4) \prod_{i=1}^4 d_i = \deg(2\sigma_{2,2}) \prod_{i=1}^4 d_i = 2 \prod_{i=1}^4 d_i.$$

□

Zum Abschluss wollen wir noch untersuchen, wann die Transversalität der Zyklen Γ_{C_i} erfüllt ist. Dafür benötigen wir eine explizite Beschreibung des Tangentialraums von Γ_C :

Lemma 3.3. *Sei $C \subset \mathbb{P}^3$ eine Kurve und $L \subset \mathbb{P}^3$ eine Gerade, die C in genau einem, glatten Punkt $p \in C$ trifft und nicht tangential zu C ist. Dann ist der Zykel $\Gamma_C \subset \mathbb{G}(1,3)$ (vgl. Proposition 3.1) im Punkt $[L]$ glatt und der Tangentialraum am Punkt $[L]$ ist gegeben durch:*

$$T_L \Gamma_C = \left\{ \varphi: \tilde{L} \rightarrow k^4 / \tilde{L} : \varphi \text{ linear und } \varphi(\tilde{p}) \subseteq \left(\tilde{\mathbb{T}}_p C + \tilde{L} \right) / \tilde{L} \right\} \quad (3.1)$$

Auf einen Beweis wird an dieser Stelle verzichtet. Ein Beweis ist in [Har92, Beispiel 16.6] zu finden und benutzt die Beschreibung des Tangentialraums aus Bemerkung 2.8.

Lemma 3.4. *Seien $B_1, B_2, B_3, B_4 \subset \mathbb{P}^3$ vier Kurven, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in \text{PGL}_4$ vier allgemeine Automorphismen von \mathbb{P}^3 und $C_i = \varphi_i(B_i)$ für $i = 1, 2, 3, 4$. Dann ist die Menge der Geraden $L \subset \mathbb{P}^3$, die C_1, C_2, C_3, C_4 schneiden endlich und für jede solche Gerade L gilt:*

- (a) L schneidet C_i in genau einen Punkt p_i ;
- (b) p_i ist ein glatter Punkt von C_i ;
- (c) L ist nicht tangential zu C .

Beweisskizze. Zeige, dass für irreduzible Kurven B_1, \dots, B_4 die Inzidenzkorrespondenz

$$\Phi := \{(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, L) \in \text{PGL}_4^4 \times \mathbb{G}(1, 3) : L \cap \varphi_i(B_i) \neq \emptyset\}$$

irreduzibel ist und die Dimension 60 hat. Dann folgt der erste Teil der Aussage für irreduzible B_1, \dots, B_4 durch Betrachtung der Projektion $\Phi \rightarrow \text{PGL}_4^4$. Für B_1, \dots, B_4 nicht notwendigerweise irreduzibel betrachte alle möglichen Kombination der irreduziblen Komponenten der vier Kurven. Das liefert den ersten Teil. Für die Eigenschaften zeigt man, dass die Menge der Automorphismen, für die die Kurve C_i eine der drei Eigenschaften nicht erfüllt eine abgeschlossene, echte Teilmenge von PGL_4 ist. Dann ist das Lemma bewiesen. \square

Aufgabe 2. [Eis16, Aufgabe 3.33.] Seien $C_1, C_2, C_3, C_4 \subset \mathbb{P}^3$ vier Kurven und $L \subset \mathbb{P}^3$ eine Gerade, die alle vier Kurven schneidet und die Bedingungen (a), (b) und (c) aus Lemma 3.4 erfüllt. Nach Definition 1.8 schneiden sich die vier Zyklen $\Gamma_{C_i} \subset \mathbb{G}(1, 3)$ transvers im Punkt $[L]$ genau dann, wenn

$$\text{codim} \bigcap_{i=1}^4 T_L \Gamma_{C_i} = \sum_{i=1}^4 \text{codim} T_L \Gamma_{C_i}$$

da $\mathbb{G}(1, 3)$ und Γ_{C_i} im Punkt $[L]$ glatt sind. Daher müssen wir nur untersuchen, wann der Schnitt der Tangentialräume

$$X := \bigcap_{i=1}^4 T_L \Gamma_{C_i}$$

Dimension 0 hat, also der Nullvektorraum ist. Dazu führen wir Koordinaten ein: Zunächst wählen wir eine Gerade $\Lambda \subset \mathbb{G}(1, 3)$, die L nicht schneidet (dies ist äquivalent dazu, ein Komplement $\tilde{\Lambda}$ von dem zweidimensionalen Vektorraum $\tilde{L} \subset k^4$ zu wählen). Dann wählen wir Parametrisierungen der beiden Geraden L, Λ , sodass wir jeden Punkt auf der Gerade mit einer eindeutige Koordinate in \mathbb{P}^1 identifizieren können, was äquivalent zu der Wahl von Basen v, v' von \tilde{L} und w, w' von $\tilde{\Lambda}$ ist. Seien $[\alpha_i : \beta_i] \in \mathbb{P}^1$ die Koordinaten des Punktes p_i auf der Gerade L und $[\mu_i : \nu_i] \in \mathbb{P}^1$ die Koordinaten des eindeutigen Schnittpunktes q_i der Geraden $\mathbb{T}_{p_i} C_i$ und Λ . Sei $\varphi \in X$. Dann lässt sich φ als 2x2-Matrix bezüglich der gewählten Basen v, v' und w, w' schreiben. Sei diese Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Dann erhalten wir aus der Bedingung der Gleichung 3.1 die lineare Gleichungen:

$$\begin{aligned}\alpha_i a_1 + \beta_i a_2 &= \mu_i \lambda_i, \\ \alpha_i a_3 + \beta_i a_4 &= \nu_i \lambda_i\end{aligned}$$

(für $i = 1, 2, 3, 4$ und geeignete $\lambda_i \in k$) bzw. in Matrixform

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & -\mu_1 \\ & & \alpha_1 & \beta_1 & -\nu_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & & & -\mu_2 \\ & & \alpha_2 & \beta_2 & -\nu_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & & & -\mu_3 \\ & & \alpha_3 & \beta_3 & -\nu_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & & & -\mu_4 \\ & & \alpha_4 & \beta_4 & -\nu_4 \end{pmatrix}}_{=:M} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = 0$$

Dann ist X der Nullvektorraum genau dann, wenn $a_1, a_2, a_3, a_4 = 0$ (und damit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 = 0$) die einzige Lösung des Gleichungssystems ist, also genau dann, wenn die Matrix M invertierbar ist. Damit müssen wir lediglich die Determinante der Matrix ausrechnen, um zu sehen, wann sich die Kurven Γ_{C_i} transvers schneiden. Mit einer Laplace-Entwicklung nach den letzten vier Spalten erhalten wir:

$$\begin{aligned}\det M &= (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)(\alpha_3 \beta_4 - \beta_3 \alpha_4)(\mu_1 \mu_2 \nu_3 \nu_4 + \nu_1 \nu_2 \mu_3 \mu_4) \\ &\quad + (\alpha_1 \beta_3 - \beta_1 \alpha_3)(\alpha_4 \beta_2 - \beta_4 \alpha_2)(\mu_1 \nu_2 \mu_3 \nu_4 + \nu_1 \mu_2 \nu_3 \mu_4) \\ &\quad + (\alpha_1 \beta_4 - \beta_1 \alpha_4)(\alpha_2 \beta_3 - \beta_2 \alpha_3)(\mu_1 \nu_2 \nu_3 \mu_4 + \nu_1 \mu_2 \mu_3 \nu_4) \\ &\stackrel{3.2}{=} (\alpha_1 \beta_3 - \beta_1 \alpha_3)(\alpha_4 \beta_2 - \beta_4 \alpha_2)(\mu_1 \nu_2 \mu_3 \nu_4 + \nu_1 \mu_2 \nu_3 \mu_4 - \mu_1 \mu_2 \nu_3 \nu_4 - \nu_1 \nu_2 \mu_3 \mu_4) \\ &\quad + (\alpha_1 \beta_4 - \beta_1 \alpha_4)(\alpha_2 \beta_3 - \beta_2 \alpha_3)(\mu_1 \nu_2 \nu_3 \mu_4 + \nu_1 \mu_2 \mu_3 \nu_4 - \mu_1 \mu_2 \nu_3 \nu_4 - \nu_1 \nu_2 \mu_3 \mu_4) \\ &= (\alpha_1 \beta_3 - \beta_1 \alpha_3)(\alpha_4 \beta_2 - \beta_4 \alpha_2)(\mu_4 \nu_1 - \nu_4 \mu_1)(\mu_2 \nu_3 - \nu_2 \mu_3) \\ &\quad + (\alpha_1 \beta_4 - \beta_1 \alpha_4)(\alpha_2 \beta_3 - \beta_2 \alpha_3)(\mu_1 \nu_3 - \nu_1 \mu_3)(\mu_4 \nu_2 - \nu_3 \mu_2),\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass

$$(\alpha_1 \beta_3 - \beta_1 \alpha_3)(\alpha_4 \beta_2 - \beta_4 \alpha_2) + (\alpha_1 \beta_4 - \beta_1 \alpha_4)(\alpha_2 \beta_3 - \beta_2 \alpha_3) = -(\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)(\alpha_3 \beta_4 - \beta_3 \alpha_4). \quad (3.2)$$

Da diese Formel wenig anschaulich ist, geben wir jetzt noch an, in welchen Fällen die Zykel Γ_{C_i} sich nicht transvers im Punkt $[L]$ schneiden:

- mindestens drei der vier Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 sind gleich
- mindestens drei der vier Tangentialräume sind bis auf Elemente aus L gleich
- zwei der vier Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 und die Tangentialräume der beiden Punkte oder der anderen beiden Punkte unterscheiden sich bloß um ein Element aus L
- wenn die vier Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 und die Tangentialräume verschieden modulo L sind, müssen die Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 und q_1, q_2, q_3, q_4 dasselbe Doppelverhältnis besitzen.

In allen anderen Fällen schneiden sich die Zykel Γ_{C_i} transvers im Punkt $[L]$.

Literaturverzeichnis

- [Eis16] Eisenbud, David und Harris, Joe. *3264 & All That: Intersection Theory in Algebraic Geometry*. 2016. URL: <https://scholar.harvard.edu/files/joeharris/files/000-final-3264.pdf> (besucht am 01.07.2020).
- [Ful84] William Fulton. *Intersection Theory*. Springer, 1984. ISBN: 978-3-662-02423-2. DOI: 10.1007/978-3-662-02421-8.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Bd. 52. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer, 1977. ISBN: 978-1-4419-2807-8. DOI: 10.1007/978-1-4757-3849-0.
- [Har92] Joe Harris. *Algebraic Geometry. A First Course*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1992. ISBN: 978-1-4419-3099-6. DOI: 10.1007/978-1-4757-2189-8.
- [Vak17] Ravi Vakil. *Foundations of Algebraic Geometry*. 2017. URL: <http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGnov1817public.pdf> (besucht am 19.07.2020).

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen Hilfsmittel als angegeben verwendet habe. Die vorliegende Arbeit ist frei von Plagiaten. Alle Ausführungen, die wörtlich oder inhaltlich aus anderen Werken entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht.

Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch bei keinem anderen Prüfer als Prüfungsleistung eingereicht und ist auch noch nicht veröffentlicht.

Ort:

Datum:

Unterschrift: